Б. А. Розенфельд

АПОЛЛОНИЙ

ПЕРГСКИЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО ЦЕНТРА
НЕПРЕРЫВНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

МОСКВА — 2004

УДК 51(09)
ББК 22.1г
Р64

Розенфельд Б. А.
Р64 Аполлоний Пергский. — М.: МЦНМО, 2004. — 176 с.: ил. — ISBN 5-94057-132-8.

Труды многих величайших математиков древности переведены на многие языки, об этих математиках написано много исторических книг и статей. Переводы же книг Аполлония Пергского — создателя теории конических сечений — издавались крайне редко, большинство переводов были по существу пересказами. На русском языке были изданы только первые 20 теорем из главного труда Аполлония «Конические сечения». Настоящая книга представляет собой попытку создания научной биографии Аполлония, содержащей анализ его трудов с точки зрения современной науки.

Для широкого круга читателей, интересующихся математикой.

Ил. 89. Библиогр. 59 назв.

ББК 22.1г

ISBN 5-94057-132-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Аполлоний был одним из трех величайших математиков древности. Труды Евклида и Архимеда переведены на многие языки, в том числе на русский, и об этих математиках написано много книг и статей. Переводы же сочинений Аполлония издавались крайне редко, большинство переводов были по существу пересказами. На русский язык переведены только первые 20 предложений главного труда Аполлония «Конические сечения». Единственной научной биографией Аполлония является статья Дж. Дж. Тумера [55] в «Словаре научных биографий», много информации об Аполлонии содержит статья Тумера [56] в его издании V—VII книг «Конических сечений».

Настоящая книга представляет собой попытку создания научной биографии Аполлония, содержащей анализ его трудов с точки зрения современной науки.

В главах о «Конических сечениях» использованы книги [16—18] и результаты магистерской и докторской диссертаций Дайаны Л. Родс, подготовленных в университете штата Пенсильвания (США).

Большую помощь в работе над этой книгой мне оказала профессор университета штата Пенсильвания Светлана Каток.

Выражаю благодарность преподавательнице Ярославского педагогического института Р. З. Гушель, предоставившей мне русский перевод «Конических сечений» И. Ягодинского и другие материалы об Аполлонии из ее обширной библиотеки работ по истории математики на русском языке.

В создании чертежей к этой книге принимала участие моя внучка Даниэла Каток.

Эта книга не могла быть написана без самоотверженного труда моей жены Люси Львовны Розенфельд, которая не только напечатала всю книгу на компьютере, но и была ее строгим редактором.

Глава 1

АПОЛЛОНИЙ В ПЕРГЕ И ЭФЕСЕ

Малая Азия — родина Аполлония

Малая Азия, где родился и вырос Аполлоний, представляет собой обширный полуостров, омываемый на севере Черным морем, на западе и юго-западе — проливами и Средиземным морем. Этот полуостров в течение многих столетий был для индоевропейских племен мостом в Европу из их прародины, находившейся южнее Каспийского моря. Индоевропейский народ, который населял Малую Азию во II тысячелетии до н. э. и в начале I тысячелетия, обычно называют хеттами.

Хетты упоминаются в Библии как «хеттеяне» и в египетских папирусах, где они именовались «хити».

Хетты создали мощную державу, столица которой Хаттушаш находилась восточнее нынешней Анкары. Одним из полководцев библейского царя Давида был хетт Урия, жена которого Вирсавия после его смерти стала женой Давида и матерью царя Соломона.

Хетты обладали довольно высокой культурой, сохранилось большое число хеттских текстов, написанных клинописью, аналогичной вавилонской, и иероглифами, аналогичными египетским.

Чешский археолог Бедржих Грозный (1879—1952), который в 1915 г. расшифровал хеттскую клинопись, установил, что хеттский язык принадлежал к западной группе индоевропейских языков. Отсюда ясно, что такие народы Европы, как греки и римляне, галлы и готы, славяне и литовцы были потомками хеттских племен. Подобно тому, как слова мужского рода в наиболее древних из этих языков оканчивались на -os, -us, -as, -es, -is, хеттские слова мужского рода оканчивались на -уш, -аш, -иш. Окончания -os, -es сохранились у современных греков, -as, -us, -is — у литовцев, латинские -us, -is у итальянцев заменились на -о, -е, а у французов — на «немое е». Древнеславянские -ос, -ус, -ис у русских сначала потеряли «с», затем превратились в краткие гласные звуки, обозначавшиеся буквами «ъ» и «ь», которые впоследствии перестали произноситься и стали обозначать только твердость или мягкость предшествовавшего согласного звука.

Хеттское слово «вадар» («вода») похоже и на русское слово *вода*, и на греческое *hydor*, и на английское *water*. Хеттское слово «паххур» («огонь») похоже на греческое слово *pyr*, немецкое *Feuer* и английское *fire*. Хеттское слово «гордион» («город») похоже и на русское слово *город*, и на английское *garden*. Хеттское слово «эшми» — 1-е лицо настоящего времени глагола «быть» похоже на славянское *есмь*, латинское *sum* и английское *I am*.

В I тысячелетии до н. э., после переселения хеттских племен с востока на запад Малой Азии и в Европу, держава хеттов распалась на отдельные государства, важнейшие из которых находились в западной части Малой Азии. Наиболее известные из городов этих государств были Илион в Трое, Пергам в Мизии, Сарды в Лидии и Гордион во Фригии. Царь Лидии Крез был знаменит своим богатством, с именем царя Фригии Гордия была связана легенда о «гордиевом узле».

В городе Пергаме был впервые изготовлен пергамент.

Во время греко-персидских войн все эти государства были завоеваны персами. Хеттский город Сарды одно время был столицей Персии. После победы греков хеттские государства подверглись эллинизации. Впоследствии эти государства вошли в состав империи Александра Македонского, Римской и Византийской империй, а в XIV—XV вв. были завоеваны турками.

Аполлоний в Перге

Имя «Аполлоний» означает «посвященный Аполлону», так же как «Артемий» означает «посвященный Артемиде», а «Димитрий» — «посвященный Деметре».

Город Перга, в котором родился Аполлоний, в течение многих веков был связан с культом Аполлона. Этот город находился на южном побережье Малой Азии, недалеко от нынешнего турецкого города Бурсы. На рис. 1 изображен современный вид развалин города Перги.

Название этого города, родственное греческому слову *pyrgos* и немецкому *Burg*, означало «башня, замок»; первоначальный смысл этого слова «скала» был связан со словами *перунаш* и *пергунаш*, означающими «бог-громовержец, разрушитель скал». Слово «перга» также входит в название города Пергама. Греческое государство, в которое входила Перга, носило название Pamphylia, что означало «относящееся ко всем племенам» и, по-видимому, было переводом хеттского названия этой области, где находились святилища, общие для всех хеттских племен.

Греки немало заимствовали из культуры хеттов, в частности, культ хеттского бога-громовержца Завайи, которого они стали называть Зевсом (*Zeus*), бога Солнца Апулунаша и его сестры-близнеца богини Луны Артиму, которых они называли Аполлоном (*Apollo*) и Артемидой (*Artemis*) [46, с. 173—174]. Предки славян и литовцев слова «перунаш» и «пергунаш» принесли в Европу, где они превратились в имена богов-громовержцев Перуна и Пяркунаса.

Греки считали Аполлона и Артемиду детьми Зевса, родившимися на острове Делос. Аполлона рассматривали как покровителя искусств и наук, в частности, медицины, и предводителя муз — богинь искусств и наук. Артемида была покровительницей охоты.

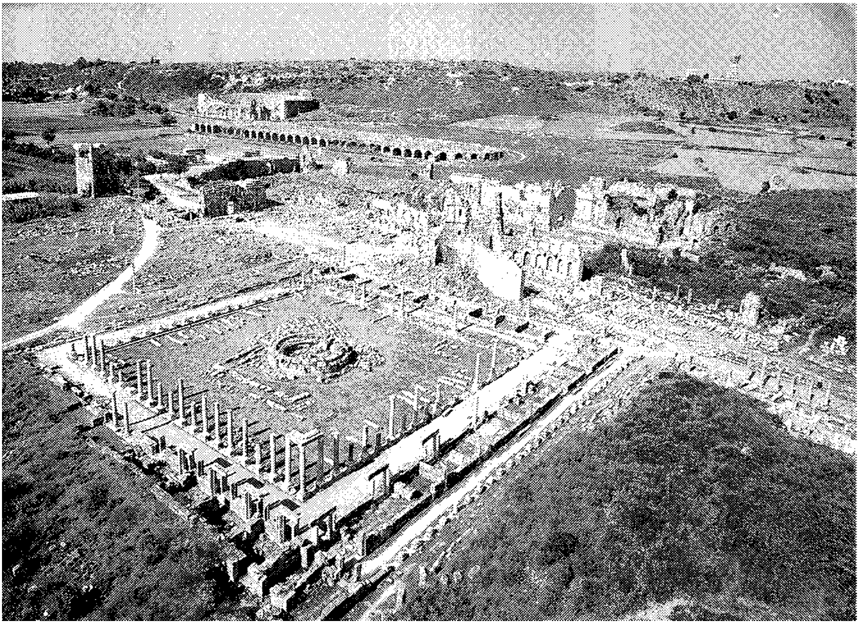


Рис. 1

Центром культов Завайи, Апулунаша и Артиму была Перга. Впоследствии греки перенесли главные святилища Зевса в Олимпию, а Аполлона — в Дельфы, главное святилище Артемиды оставили в Перге. Другой храм Артемиды, считавшийся одним из «семи чудес света», также находился в Малой Азии в городе Эфесе на западном берегу полуострова.

Геродот в своей «Истории» упоминает, что цари хеттских государств посылали богатые дары в главное святилище Аполлона. Геродот, живший в IV в. до н. э., когда это святилище находилось в Дельфах, считал, что эти дары посылались в Дельфы. Но хеттские государства, о которых писал Геродот, существовали до перевода святилища из Перги в Дельфы, и дары посылали в Пергу.

В предисловии ко II книге «Конических сечений» Аполлоний упоминает своего взрослого сына, которого также звали Аполлоний. Это имя было традиционным в роду Аполлония, по-видимому, его предки были жрецами Апулунаша и Аполлона.

Аполлоний в Эфесе

Аполлоний посвятил первые три книги «Конических сечений» Евдему Пергамскому. В предисловии ко II книге Аполлоний писал: «Познакомь с этой книгой геометра Филонида, которого я рекомендовал тебе в Эфесе, если он окажется вблизи Пергама» [25, т. 2, с. 2]. Как известно [38], Филонид, ученик Евдема, был математиком и философом-эпикурейцем, состоявшим при дворе Селевкидских царей Антиоха IV Епифана (175—163 до н. э.) и Деметрия I Сотера (162—150 до н. э.). Евдем Пергамский был первым учителем Филонида и Аполлония, которые учились у него в Эфесе. Даты жизни Филонида позволяют установить, что Аполлоний родился около 250 г. до н. э. Евдем посоветовал Аполлонию продолжать учение в Александрии. Поэтому естественно, что Аполлоний прислал свой основной труд Евдему Пергамскому.

Удвоение куба

Со святилищем Аполлона в Дельфах связана задача об удвоении куба. Согласно легенде, на острове Делос, считавшемся родиной Аполлона, разразилась эпидемия чумы. Перепуганные жители острова обратились в святилище Аполлона и молили бога, покровителя медицины, спасти их. Жрецы сказали, что для этого следует удвоить жертвенник святилища, который имел форму куба. Жители Делоса соорудили такой же куб и поставили его на первый куб. Эпидемия не прекратилась. Тогда жрецы объяснили, что удвоенный жертвенник также должен иметь форму куба, т. е. если ребро первоначального куба было равно a, ребро нового куба должно быть равно корню уравнения

$$x^3 = 2a^3. \tag{1.1}$$

Эту задачу, получившую название «делийской задачи», нельзя было решить циркулем и линейкой. Этой задачей занимались многие греческие математики IV в. до н. э. Ее решение привело к открытию конических сечений.

Возможно, что легенда об удвоении кубического жертвенника появилась тогда, когда святилище Аполлона находилось еще в Перге, и, таким образом, открытие конических сечений было связано с родным городом Аполлония.

Глава 2

АПОЛЛОНИЙ В АЛЕКСАНДРИИ

Александрийская школа

После окончания учебы в Эфесе Аполлоний продолжал изучение наук в Александрии.

Александрия — город и порт при впадении Нила в Средиземное море — была основана Александром Македонским после завоевания им Египта. Еще при Александре этот город был столицей Египта, а после распада империи Александра стал резиденцией царей Египта из династии Птолемеев, основанной военачальником Александра Македонского Птолемеем Лагом.

При царице Клеопатре Египет был завоеван римлянами и вошел в состав Римской империи.

Еще при Птолемее Лаге Александрия стала главным научным центром всего эллинистического мира, а после римского завоевания — главным научным центром всей Римской империи.

Основным научным учреждением Александрии был Мусейон (*Mouseion*) — храм муз. Большинство муз были покровительницами различных искусств, но две музы — муза истории Клио и муза астрономии Урания — были покровительницами гуманитарных и точных наук. От латинского названия Мусейона (*Museum*) произошло наше слово «музей».

Мусейон представлял собой академию наук с университетом и богатой библиотекой рукописей.

Основателем Мусейона был Евклид.

Наиболее крупных ученых Мусейона называли первыми буквами греческого алфавита. Второй буквой — Бета — называли Эратосфена, пятой буквой — Эпсилон — Аполлония. Очевидно, что первой буквой — Альфа — называли Евклида, а третьей буквой — Гамма — Архимеда. Четвертой буквой — Дельта, — по-видимому, называли Конона — рано умершего талантливого ученого, которому Архимед посылал свои сочинения.

Евклид

Евклид жил в середине IV в. — конце III в. до н. э. Главный труд Евклида «Начала» (*Stoicheia*) представлял собой свод почти всех знаний античных математиков по элементарной геометрии и теоретической арифметике.

«Начала» Евклида состоят из 13 книг. В I книге изложены основы планиметрии, во II книге — геометрическая алгебра, в III книге — учение о круге, в IV книге — учение о многоугольниках, в V книге — теория отношений геометрических величин, в VI книге — учение о подобии. VII книга посвящена теории числовых отношений, VIII книга — теории делимости чисел, IX книга — учению о простых и совершенных числах, X книга — теории иррациональностей. В XI книге изложены основы стереометрии, в XII книге — учение о площадях и объемах, в XIII книге — учение о правильных многогранниках.

Б. Л. ван дер Варден [6, с. 269—270] пришел к выводу, что все 13 книг «Начал» Евклида написаны на основе сочинений греческих математиков V—IV вв. до н. э.: I—IV и XI книги — обработки «Начал» Гиппократа Хиосского, V—VI и XII книги — сочинений Евдокса Книдского, VII—IX книги — сочинений пифагорейцев, вернее всего, Архита Тарентского, X и XIII книги — сочинений Теэтета Афинского.

Во введении к I книге даются определения точки, линии, поверхности, прямой линии и плоской поверхности и различных плоских фигур, а также аксиомы геометрического характера, так называемые постулаты, и общие аксиомы о сравнении величин. Дополнительные определения приводятся во введениях к некоторым другим книгам.

Первые три постулата определяют построения идеальным циркулем и идеальной линейкой. IV постулат о том, что все прямые углы равны, исключает сферическую геометрию, в которой прямые углы между меридианами и параллелями не наложимы друг на друга. V постулат лежит в основе теории параллельных линий.

В «Началах» Евклида рассматриваются только такие величины, которые можно построить циркулем и линейкой, поэтому в «Началах» не рассматриваются ни площадь круга, ни объемы круглых тел. По существу, в «Началах» рассматривается не то, что мы называем пространством Евклида, а только множество точек этого пространства, которые можно построить циркулем и линейкой.

В соответствии с античной традицией Евклид применял термин «произведение» только к произведению натуральных чисел, а то, что мы называем произведением отрезков, Евклид называл прямоугольником, построенным на этих отрезках. На этом представлении основана геометрическая алгебра древних греков, изложенная во II книге «Начал». То, что мы называем произведением двух отношений геометрических величин, Евклид называл отношением, составленным из этих двух отношений.

Наиболее часто Аполлоний ссылался на предложения II_{14} и VI_{23} (т. е. на 14 предложение II книги и на 23 предложение VI книги) «Начал» Евклида. Первое из этих предложений [9, т. 1, с. 78—79] позволяет построить квадрат, равновеликий данному прямоугольнику.

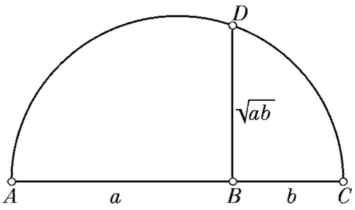


Рис. 2

Если стороны прямоугольника равны a и b, то сторона квадрата равна квадратному корню из ab. Если $AB=a$ и $BC=b$ — два отрезка диаметра AC круга, то сторона квадрата, равновеликого этому прямоугольнику, равна перпендикуляру BD к диаметру, восставленному в точке B и доходящему до окружности круга (рис. 2). Если мы обозначим $AB=x_1$, $BC=x_2$, $BD=y$, то это предложение будет равносильно уравнению

$$y^2=x_1x_2. \tag{2.1}$$

Это уравнение называют уравнением окружности ADC с двумя абсциссами.

Предложение VI_{23} гласит: «Равноугольные параллелограммы имеют друг к другу составное отношение их сторон» [9, т. 1, с. 203—204]. В силу этого предложения отношение прямоугольника A с горизонтальной стороной a и вертикальной стороной b к прямоугольнику B с горизонтальной стороной c и вертикальной стороной d составлено из отношений a/c и b/d (рис. 3).

Во введении к XI книге «Начал» приводятся определения шара и прямых круговых конуса и цилиндра:

«14. Сфера будет: если при неподвижности диаметра полукруга вращающийся полукруг снова вернется в то же самое [положение], из которого он начал двигаться, то охваченная фигура [и есть сфера]...

18. Конус будет: если при неподвижности одной из сторон прямоугольного треугольника, [прилежащих] к прямому углу, вращающийся треугольник снова вернется в то же самое [положение], из которого он начал двигаться, то охваченная фигура [и есть конус]. И если неподвижная прямая будет равна другой, вращающейся, [той, что] при прямом угле, то конус будет прямоугольным, если же меньше, то тупоугольным, если же больше, то остроугольным...

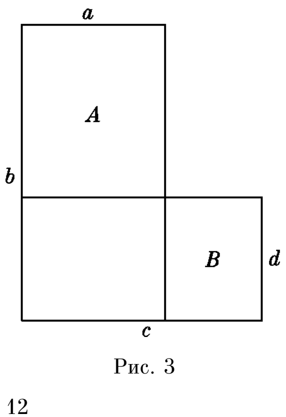


Рис. 3

22. Цилиндр будет: если при неподвижности одной из сторон прямоугольного параллелограмма, [прилегающих] к прямому углу, вращающийся параллелограмм снова вернется в то же самое [положение], из которого он начал двигаться, то охваченная фигура [и будет цилиндром]» [9, т. 3, с. 10].

На рис. 4, *а—в*, изображены конусы, определенные Евклидом.

Евклид был также автором геометрических сочинений «Данные» (*Dedomena*) и «О делении фигур» (*Peri diaireseōr*), астрономического сочинения «Феномены» (*Phainomena*), а также «Оптики» (*Optika*) и сочинений по теории музыки и статике.

Аполлоний во введении к I книге «Конических сечений» упоминал не дошедшее до нас сочинение Евклида «Начала конических сечений» (*Kōnikōn stoicheia*) в четырех книгах.

Александрийский математик III в. н. э. Папп в VII книге «Математического собрания» (*Synagōgē mathēmatikē*) упоминал еще два не дошедших до нас сочинения Евклида «Геометрические места на поверхностях» (*Topoi pros epiphaneiais*) и «Поризмы» (*Porismata*). Папп дал краткое описание «Поризмов» и указал, что это сочинение состоит из трех книг и содержит 171 теорему [50, с. 485—495; 51, с. 94—105].

Он написал комментарии к обоим этим сочинениям Евклида [50, с. 669—717, 792—802; 51, с. 260—295, 362—371].

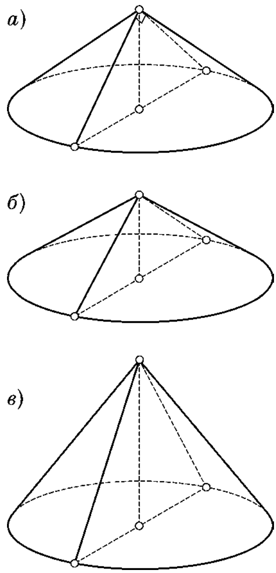


Рис. 4

Слово *porismata* в «Началах» Евклида означает «следствия», но в сочинении «Поризмы» это слово имеет более широкий смысл и означает «математические открытия». Фрагменты из этого сочинения, сохранившиеся в средневековых арабских трактатах, изучались Я. П. Хогендайком [45].

Сведения о «Поризмах», приведенные Паппом, анализировались Мишелем Шалем (1793—1880) [37], который пришел к выводу, что «Поризмы» — одно из самых значительных и оригинальных сочинений Евклида. В комментариях Паппа к «Поризмам» приведено несколько важных теорем проективной геометрии (русский перевод: [18, с. 112—116]), в том числе знаменитая теорема Паппа о шестиугольнике, вписанном в пару прямых, которая является частным случаем теоремы Блеза Паскаля (1623—1662) о шестиугольнике, вписанном в коническое сечение. Поэтому ясно, что в самих «Поризмах» также доказывались теоремы проективной геометрии.

Эратосфен

Эратосфен Киренский (273—192 до н. э.), уроженец Кирены — города в Северной Африке, находящегося западнее Египта, учился в Афинах, в 244 г. переехал в Александрию, где стал известным математиком, астрономом и географом. В 235 г. Эратосфен был назначен библиотекарем Мусейона.

Эратосфен измерил длину 1° земного меридиана между городами Мероэ и Сиеной и вычислил длину окружности земного шара.

Полученное им значение соответствует длине диаметра Земли, которая только на 50 миль меньше расстояния между полюсами Земли.

В своем главном труде «География» (*Geōgraphika*) Эратосфен изложил основы картографии, дал описание многих стран и разделил обитаемую область Земли на семь «климатов» — широких полос, простирающихся с запада на восток.

В «Созвездиях» (*Katasterismoi*) Эратосфен привел каталог неподвижных звезд, послуживший образцом для аналогичного каталога в «Алмагесте» Клавдия Птолемея.

Эратосфен предложил способ нахождения простых чисел, известный под названием «решето Эратосфена». Он сконструировал специальный прибор «мезолябий» для нахождения двух средних пропорциональных величин x и y между двумя данными величинами a и b, удовлетворяющих условиям

$$a:x=x:y=y:b. \tag{2.2}$$

При $b=2a$ величина x является решением уравнения (1.1) задачи об удвоении куба.

Архимед

Архимед (287—212 до н. э.), величайший ученый древности, родился и жил в Сиракузах на восточном берегу острова Сицилия. Он учился в Александрии и был связан с Александрийской школой в течение всей своей жизни. Архимед находился в переписке с Эратосфеном и Кононом и посылал им свои сочинения, а после смерти Конона посылал их его другу Досифею.

Архимед был математиком, механиком, астрономом, физиком и инженером, автором многих технических изобретений.

Архимед усовершенствовал «метод исчерпывания» Евдокса, изложенный в XII книге «Начал» Евклида, и с помощью этого метода решил многие задачи интегрального исчисления. В отличие от Евклида, Архимед рассматривал также геометрические величины, которые нельзя построить с помощью циркуля и линейки.

В «Измерении круга» (*Kyklou metrēsis*) Архимед вычислил приближенное значение числа π и с помощью этого выражения нашел длину окружности и площадь круга.

В сочинении «О шаре и цилиндре» (*Peri sphairas kai kylindrou*) Архимед вычислил объемы шара и прямых круговых цилиндра и конуса и площади поверхностей этих тел.

В «Квадратуре сечения прямоугольного конуса» (*Tetragōnismos orthogōniou kōnou tomēs*) Архимед вычислил площадь сегмента параболы.

В сочинении «О коноидах и сфероидах» (*Peri kōnoeideōn kai sphairoeideōn*) Архимед рассматривал тела, ограниченные поверхностями, полученными вращением конических сечений.

Во многих математических трактатах Архимед пользовался механическими соображениями, рассматривая сечения тел как материальные пластинки, вес которых пропорционален их площади, и применяя законы рычага.

В сочинении «О спиралях» (*Peri helikōn*) Архимед решил некоторые задачи дифференциального исчисления.

Архимед решал задачи, сводящиеся к кубическим уравнениям, применяя различные виды «вставок» и пересечение конических сечений.

В «Исчислении песчинок» (*Psammitēs*) Архимед построил оригинальную систему нумерации больших чисел.

Архимеду принадлежат гидростатический закон, носящий его имя, и важные результаты в теории зеркал.

Из изобретений Архимеда упомянем бесконечный винт, применяющийся для вычерпывания воды из водоемов, а также планетарий, наглядно показывающий движение Солнца, Луны и планет.

Во время осады Сиракуз римлянами в 214—212 гг. до н. э. Архимед был душой обороны города, защитники которого применяли многие его изобретения. Архимед расставил солдат с блестящими медными щитами таким образом, что они образовывали часть поверхности параболоида вращения, ось которого была направлена на Солнце, а фокус находился на одном из кораблей римлян. Солнечные лучи, отражаясь от полированных щитов солдат, попадали на вражеский корабль и поджигали его. Так как фокус параболоида расположен на его оси, сожжение корабля возможно только при восходе Солнца, когда Солнце, корабль и вершина параболоида вращения расположены на одной прямой линии.

Некоторые историки сомневались в возможности такого сожжения корабля. Но греческий инженер Иоаннис Сакас [52] в 1968 г. в Салониках при восходе Солнца успешно воспроизвел действие Архимеда — сжег деревянное судно.

После взятия Сиракуз римлянами Архимед был убит.

На могильной плите Архимеда был выгравирован чертеж, изображающий цилиндр со вписанными в него конусом и шаром. По этому памятнику через полтора столетия Цицерон, будучи квестором Сицилии, нашел могилу Архимеда.

Этот чертеж (рис. 5) воспроизводит одно из самых замечательных доказательств Архимеда — его теоремы об объеме шара, изложенной в «Послании Эратосфену о механических теоремах» [4, с. 298—327]. В этом сочинении Архимед рассматривал прямой круговой цилиндр, высота которого равна радиусу D

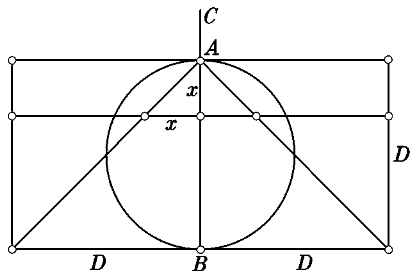


Рис. 5

его основания. В цилиндр вписаны прямой круговой конус, основание которого совпадает с нижним основанием цилиндра, а вершина — с центром A верхнего основания цилиндра, и шар, полюсы которого совпадают с центрами A и B верхнего и нижнего оснований цилиндра.

Площади сечений этих трех тел плоскостью, параллельной основаниям цилиндра, на расстоянии x от точки A равны, соответственно, πD^2, πx^2 и $\pi x(D-x)$. Архимед рассматривал эти сечения как материальные пластинки, веса которых равны их площадям. Он заметил, что если перенести сечения конуса и шара в точку C оси цилиндра, находящуюся на расстоянии D выше точки A, а сечение цилиндра оставить на месте и рассматривать линию CAB как рычаг с точкой опоры A, то моменты сечений цилиндра, конуса и шара будут равны, соответственно, $\pi D^2 x$, $\pi D x^2$ и $\pi D^2 x - \pi D x^2$. Поэтому перенесенные сечения конуса и шара будут уравновешивать сечение цилиндра. Архимед считал, что если равновесие имеет место для весов отдельных сечений, оно будет иметь место и для сумм этих весов. Суммой весов сечений тела Архимед считал вес всего этого тела, т. е. его объем. Если мы обозначим объемы цилиндра, конуса и шара, соответственно, $V_{\text{ц}}$, $V_{\text{к}}$ и $V_{\text{ш}}$, то сумма моментов перенесенных сечений равна $V_{\text{к}}D+V_{\text{ш}}D$, а сумма моментов сечений цилиндра равна произведению его объема на расстояние от точки A до его центра тяжести, т. е. $\frac{V_{\text{ц}}D}{2}$. Так как $V_{\text{к}}=\frac{V_{\text{ц}}}{3}$, мы получим, что $V_{\text{ш}}=\frac{V_{\text{ц}}}{2}-\frac{V_{\text{ц}}}{3}=\frac{V_{\text{ц}}}{6}$ или, так как $V_{\text{ц}}=\pi D^3$, $V_{\text{ш}}=\frac{\pi D^3}{6}$. Если обозначить $D=2R$, мы можем переписать последнюю формулу в виде

$$V_{\text{ш}}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Конон

Конон Самосский был моложе Архимеда, но умер раньше него. Конон был геометром и астрономом. Работы Конона по коническим сечениям упоминаются в IV книге «Конических сечений» Аполлония. Конон написал семь книг по астрономии. В некоторых из них были приведены сведения о древневавилонских наблюдениях затмений, впоследствии использованные Гиппархом и Клавдием Птолемеем. На основании собственных наблюдений Конон составил календарь с указанием восходов и заходов неподвижных звезд и метеорологических предсказаний. Из звезд, находящихся вне созвездий, Конон составил новое созвездие, названное им «Волосами Вероники» в честь жены царя Египта Птолемея III Эвергета, правившего в 222—217 гг. до н. э.

Аполлоний в Александрии

В Александрии Аполлоний учился в Мусейоне у учеников Евклида. С Александрией была связана и дальнейшая жизнь Аполлония.

Первые научные работы Аполлония относились к астрономии. Один из астрономических трактатов Аполлония цитируется в «Алмагесте» Птолемея.

Большинство математических сочинений Аполлония относится к геометрии.

В предисловии к I книге «Конических сечений» Аполлоний писал Евдему Пергамскому: «Когда я посетил тебя в Пергаме, я заметил, что ты хочешь познакомиться с написанными мной „Коническими сечениями“. Поэтому я посылаю тебе эту первую книгу в исправленном виде; остальные я отправлю, когда сам буду ими доволен. Ведь ты, конечно, должен вспомнить, что я тебе сказал о причине, заставившей меня приняться за сочинение этих книг, а именно — о желании, выраженном математиком Навкратом, когда он гостил у меня в Александрии, и о том, что когда он торопился уехать, я как можно скорее написал этот труд в восьми книгах и передал ему без всякой отделки» [25, т. 1, с. 194]. Из этих слов видно, что Аполлоний писал «Конические сечения» в Александрии. После окончания «Конических сечений» Аполлония стали называть в Александрии «Великим Геометром».

Аполлоний умер ок. 170 г. до н. э.

Глава 3

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРУДЫ АПОЛЛОНИЯ

Конические сечения

Главным научным трудом Аполлония были «Конические сечения» (*Kōnika*). В этом труде Аполлоний в корне преобразовал существовавшую до него теорию конических сечений, разработал новые геометрические методы, которые в настоящее время относятся к аналитической, аффинной, проективной, конформной и дифференциальной геометрии, и ввел общепринятую ныне терминологию.

«Конические сечения» состояли из восьми книг, из которых сохранились только первые семь. I—IV книги сохранились в греческом оригинале. V—VII книги имеются только в арабском переводе Сабита ибн Корры (836—901). Этот перевод был выполнен по просьбе учителей ибн Корры братьев Бану Муса, которые отредактировали перевод и написали к нему предисловие.

Греческий текст I—IV книг с латинским переводом издал Иоганн Людвиг Гейберг (1854—1928) [24]. Тот же греческий текст с переводом на новогреческий язык издал Евангелос Стаматис (1898—1990) [25].

Арабский текст V—VII книг с английским переводом и комментариями издал Джералд Джеймс Тумер [26].

Латинский перевод I—IV книг с греческого и V—VII книг с арабского издал Эдмунд Галлей (1656—1742) [27]. Французский перевод I—IV книг с греческого и V—VII книг с латинского перевода Галлея с комментариями издал Поль Вер Экке [28]. Аналогичный немецкий перевод I—VII книг издал А. Чвалина [29]. Аналогичный английский перевод I—VII книг издал Томас Литтл Хизс [30]. Хизс заменял некоторые предложения Аполлония их кратким изложением. Английский перевод Роберта К. Тальяферро I—III книг без комментариев [31] был издан в серии «Великие книги Западного мира», являющейся приложением к Британской энциклопедии. Этот перевод был переиздан в редакции Вильяма Донахью и Даны Денсмор [32]. Английский перевод издан Майклом Фридом [33].

Е. Стаматис в книге [25] поместил также свои переводы на новогреческий язык V—VII книг по изданию Галлея. Иван Ягодинский издал в статье [1] русский перевод первых 20 предложений I книги «Конических сечений».

а)

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ
ΚΩΝΙΚΑ

ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ - ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ

ΤΟΜΟΣ Α′

ΜΑΡΤΥΡΙΑΙ ΕΛΛΗΝΙΚΑΙ - ΛΑΤΙΝΙΚΑΙ, ΒΙΒΛΙΟΝ Α′

ΥΠΟ
ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΚΔΟΣΙΣ
ΤΕΧΝΙΚΟΥ ΕΠΙΜΕΛΗΤΗΡΙΟΥ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΑΘΗΝΑΙ 1975

б)

Apollonius
Conics
Books V to VII

The Arabic Translation of the
Lost Greek Original
in the Version of the Banū Mūsā

Volume I: Introduction, Text, and Translation

Edited
with Translation and Commentary by
G.J. Toomer

In Two Volumes
With 288 Figures

Springer-Verlag
New York Berlin Heidelberg
London Paris Tokyo Hong Kong

в)

APOLLONII PERGÆI
CONICORUM
LIBRI OCTO,
ET
SERENI ANTISSENSIS
DE SECTIONE
CYLINDRI & CONI
LIBRI DUO.

OXONIÆ,
E THEATRO SHELDONIANO, An. Dom. MDCCX.

Рис. 6

В переводах Хизса, Тумера, Тальяферро, Фрида и Ягодинского формулировки геометрической алгебры Аполлония заменены формулами современной алгебры.

Н. Терзиоглу в книге [34] издал факсимиле арабской рукописи «Конических сечений» из библиотеки Айя София в Стамбуле.

На рис. 6, *а—в* воспроизведены титульные листы изданий [25—27].

Подробное изложение «Конических сечений» содержится в книге Г. Цейтена «Учение о конических сечениях в древности» [59].

Упомянем также описание «Конических сечений» Бартела Лендерта ван дер Вардена (1903—1996) [6, с. 325—356], Михаила Егоровича Ващенко-Захарченко

(1825—1912) [7, с. 97—108] и Андрея-Адольфа Павловича Юшкевича (1906—1993) [10, с. 130—139].

Первые три книги «Конических сечений» Аполлоний послал своему учителю Евдему Пергамскому.

IV—VII книги, написанные после смерти Евдема Пергамского, Аполлоний послал Атталу — ученику Евдема.

Попытки восстановления VIII книги на основании сказанного о ней в предисловии к VII книге предпринимались многими математиками. Упомянем реконструкцию ибн ал-Хайсама (965 — ок. 1040), изданную с английским переводом Я. П. Хогендайком [43], и реконструкцию Э. Галлея в книге [27].

О других переводах и реконструкциях «Конических сечений» Аполлония см. книгу Дж. Сартона (1884—1956) [53, с. 173—175] и статью Тумера [56].

Другие математические сочинения Аполлония

В VII книге «Математического собрания» Паппа [50, с. 480—485, 495—503; 51, с. 86—95, 104—115] дается краткое описание шести математических трактатов Аполлония:

1) «Отсечение отношения» (*Logou apotomē*) в двух книгах, содержащих 180 теорем;

2) «Отсечение площади» (*Chōriou apotomē*) в двух книгах, содержащих 124 теоремы;

3) «Определенное сечение» (*Diōrismene tomē*) в двух книгах, содержащих 83 теоремы;

4) «Вставки» (*Neuseis*) в двух книгах, содержащих 125 теорем;

5) «Касания» (*Epaphai*) в двух книгах, содержащих 60 теорем;

6) «Плоские геометрические места» (*Topoi epipedoi*) в двух книгах, содержащих 147 теорем.

Папп написал также комментарии к этим трактатам [50, с. 512—669; 51, с. 126—258].

Из этих сочинений сохранилось только первое—в средневековом арабском переводе. Латинский перевод этого сочинения с арабского был издан Э. Галлеем [35], английский перевод — Э. М. Мациеровским [36].

Арабский историк ибн ан-Надим, живший в X в., в своей «Библиографии наук» писал, что арабам, кроме «Конических сечений» и «Отсечения отношения», были известны следующие математические трактаты Аполлония:

«(1) „Сочинение об определенном отношении“ в двух книгах, Сабит [ибн Корра] исправил первую из них, вторая была переведена на арабский язык, но не была понята.

(2) „Книга об отсечении площадей в отношениях“ (*кат^{c}ас-сутух ^{c}ала нисаб*) в одной книге.

(3) „Сочинение о касающихся кругах“» [44, с. 188].

Первое и третье из этих сочинений, очевидно, совпадают с сочинениями, описанными Паппом. Второе сочинение, указанное ибн ан-Надимом, не совпадает со вторым сочинением, указанным Паппом, но весьма вероятно, что оно является частью этого сочинения.

В сохранившемся фрагменте II книги «Математического собрания» Паппа [50, с. 1—19] приведены его комментарии к трактату Аполлония о больших числах. Название трактата не сохранилось.

В комментариях Паппа к X книге «Начал» Евклида, сохранившихся в арабском переводе, излагается трактат Аполлония «О неупорядоченных иррациональностях» (*Peri tōn ataktōn alogōr*).

Греческий математик V в. н. э. Прокл Диадох в комментариях к I книге «Начал» Евклида упоминал трактат Аполлония «Винтовые линии» (*Kochlias*).

«XIV книга „Начал“ Евклида» [9, т. 3, с. 142—151], написанная Гипсиклом, представляет собой комментарии к сочинению Аполлония «Сравнение додекаэдра с икосаэдром» (*Synkrisis dodekaedrou kai eikosaedrou*).

Греческий математик VI в. н. э. Евтокий Аскалонский в комментариях к «Измерению круга» Архимеда упоминал сочинение Аполлония «Быстрое получение результатов» (*Ōkytokion*).

Многие из этих сочинений Аполлония, полностью или частично переведенные на арабский язык, были известны математикам средневекового Востока. Некоторые фрагменты арабских переводов шести перечисленных выше трактатов Аполлония сохранились в «Избранных задачах» Ибрахима ибн Синана (908—946), внука Сабита ибн Корры, и в «Геометрических примечаниях» Абу Саида ас-Сиджзи (ок. 950 — ок. 1025) и были изданы с английским переводом Я. П. Хогендайком [44, с. 228—242].

Изложение трактата Аполлония об иррациональностях издано с французским переводом Ф. Вепке [58]. Русский перевод изложения трактата «Касания» издан И. О. Лютер [12].

Многие ученые Западной Европы предпринимали попытки восстановить утерянные сочинения Аполлония.

Франсуа Виет (1540—1603) в книге «Галльский Аполлоний» [57] и Марин Гетaлдич (1566—1622) в «Дополнении к Галльскому Аполлонию» [41] восстанавливали «Касания».

Геталдич в книге «Воскрешенный Аполлоний» [42] восстанавливал «Вставки».

Франс ван Схоотен (1615—1660) [54] и Пьер Ферма (1601—1665) [40] реконструировали «Плоские геометрические места».

Упомянем также недавнюю реконструкцию задачи Аполлония из сочинения «Касания» о проведении окружности, касающейся трех данных окружностей, предложенную А. В. Хабелашвили [22].

О других реконструкциях трактатов Аполлония см. книгу Сартона [53, с. 173—175] и статью Тумера [56].

Глава 4

АСТРОНОМИЯ

Деференты и эпициклы

Согласно Аристотелю (384—322 до н. э.), Вселенная состоит из трех миров — подлунного мира, содержащего Землю, находящуюся в центре Вселенной, и окружающего ее пространства до орбиты Луны, надлунного мира, содержащего пространство от орбиты Луны до сферы неподвижных звезд, и мира за сферой неподвижных звезд. Подлунный мир Аристотель называл «физическим миром» и считал, что в этом мире действует земная механика с неравномерными движениями по криволинейным траекториям. Надлунный мир Аристотель называл «математическим миром» и считал, что в этом мире могут существовать только равномерные движения по идеальным кривым — окружностям. Третий мир Аристотель называл «божественным миром» и считал его местом обитания богов и ангелов. На этом основана классификация теоретических наук в «Метафизике» Аристотеля: «Имеются три умозрительных учения: математика, учение о природе, учение о божественном» [2, с. 182].

Астрономический труд Клавдия Птолемея, обычно называемый «Алмагестом» [15], первоначально назывался «Математическое сочинение» (*Syntaxis mathēmatikē*); название «Алмагест» произошло от одного из его греческих названий «Величайшее сочинение» (*Megistē syntaxis*), которое арабские переводчики переделали в «ал-Маджистӣ».

На самом деле, видимое движение Солнца, Луны и планет происходит не по окружностям и не является равномерным. Поэтому, чтобы свести движение этих светил к тому, что установлено Аристотелем для «математического мира», в «Алмагесте» изложена довольно сложная система, в которой Солнце движется равномерно по небольшой окружности, называемой эпициклом, центр которого также движется равномерно по большой окружности, называемой деферентом, в центре которого находится Земля, или, что равносильно этому, движется равномерно по окружности, расположенной эксцентрично по отношению к Земле, а движение Луны и планет происходит по эпициклам и деферентам, эксцентричным по отношению к Земле.

В I главе XII книги «Алмагеста», где говорится о видимом попятном движении пяти планет, Птолемей для простоты рассматривал отдельно «эпициклическую» и «эксцентрическую» гипотезы о движении планет. Он писал: «При исследовании этого предмета различные математики, а именно Аполлоний Пергский, доказывают сначала для одной только аномалии, а именно связанной с Солнцем, следующую лемму. Предположим, что она [т. е. аномалия] получается по гипотезе эпицикла, причем центр эпицикла совершает [среднее] движение по долготе в направлении последовательности знаков [зодиака] по гомоцентрическому с зодиаком кругу, планета же совершает [равномерное] движение по аномалии на эпицикле вокруг его центра, идя по дуге от апогея в направлении последовательности знаков. Проведем от точки нашего зрения некоторую прямую, пересекающую эпицикл так, чтобы половина ее отрезка внутри эпицикла относилась к отрезку секущей от точки местонахождения наблюдателя до сечения с перигейной дугой эпицикла как скорость эпицикла к скорости планеты. Полученная таким образом точка на проведенной прямой, лежащая на перигейной дуге эпицикла, разделит места с прямыми и попятными движениями так, что планета, находясь в этой точке, будет казаться нам стоящей на месте.

Если же относящаяся к Солнцу аномалия объясняется по гипотезе эксцентрического круга, что возможно лишь для трех планет, которые могут отходить от Солнца на любое расстояние, и центр эксцентрического круга движется [равномерно] вокруг центра зодиака в направлении последовательности знаков со скоростью, равной [средней] скорости Солнца, а планета идет по эксцентру вокруг его центра против последовательности знаков, имея скорость, равную [средней] скорости движения аномалии, и если через центр зодиака, т. е. точку местонахождения наблюдателя, провести прямую, пересекающую эксцентр так, чтобы половина этой прямой относилась к меньшему из отрезков от положения наблюдателя как скорость эксцентра к скорости планеты, то планета, будучи в точке, где эта прямая пересекает перигейную дугу эксцентра, будет казаться нам находящейся в стоянии» [15, с. 373]. Далее приводится доказательство этой леммы при обеих гипотезах и устанавливается совпадение полученных результатов.

Далее Птолемей писал: «Остается показать, почему в каждой из рассмотренных гипотез нужно брать прямые, разделенные именно в этом отношении, чтобы точки H и Θ соответствовали кажущимся стояниям, и почему на дуге $H\Gamma\Theta$ необходимо должно иметь место попятное движение, а на остальной части круга — движение вперед». Этому Аполлоний предпосылает следующую лемму:

«Если в треугольнике $AB\Gamma$, где сторона $B\Gamma$ больше $A\Gamma$, отложить $\Gamma\Delta$, не меньшую $A\Gamma$, то $\Gamma\Delta$ будет иметь к $B\Delta$ отношение большее, чем угол $AB\Gamma$ имеет к $B\Gamma A$».

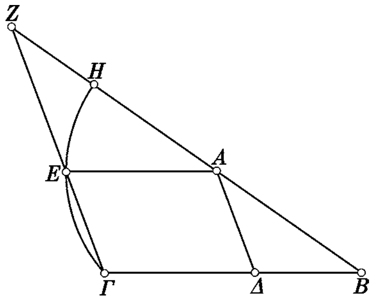


Рис. 7

Доказывает он это так. «Дополним, говорит он, параллелограмм $A\Delta\Gamma E$ (рис. 7), и пусть продолжения BA и ΓE пересекутся в точке Z. Поскольку AE не менее $A\Gamma$, круг, описанный из центра A радиусом AE, пройдет или через Γ или дальше ее. Пусть он пройдет через Γ, как круг $HE\Gamma$. И так как треугольник AEZ больше сектора AEH, а треугольник $AE\Gamma$ меньше сектора $AE\Gamma$, то треугольник AEZ к треугольнику $AE\Gamma$ будет иметь большее отношение, чем сектор AEH к сектору $AE\Gamma$. Как сектор AEH относится к сектору $AE\Gamma$, так будет и угол EAZ относится к углу $EA\Gamma$, и как треугольник AEZ относится к треугольнику $AE\Gamma$ так будет относиться и основание ZE к $E\Gamma$. Следовательно, ZE к $E\Gamma$ будет иметь большее отношение, чем угол ZAE к углу $EA\Gamma$. Но как ZE относится к $E\Gamma$, так будет относиться и $\Gamma\Delta$ к ΔB. Угол ZAE равен углу $AB\Gamma$, угол $EA\Gamma$ равен $B\Gamma A$, поэтому $\Gamma\Delta$ имеет к ΔB большее отношение, чем угол $AB\Gamma$ к углу $A\Gamma B$. Ясно также, что это отношение будет еще больше, если мы предположим, что $\Gamma\Delta$, т. е. AE, не равна, а больше $A\Gamma$» [15, с. 275].

Приведенная Птолемеем цитата из Аполлония является единственным сохранившимся фрагментом из утерянного астрономического трактата Аполлония, где Аполлоний обосновывал эпициклическую и эксцентрическую гипотезы движения планет и доказывал их эквивалентность.

Важнейшей особенностью теории движения планет, изложенной в «Алмагесте», является то, что центры эпициклов Меркурия и Венеры совпадают с центром Солнца, а для Марса, Юпитера и Сатурна отрезки, соединяющие центры этих планет с центрами эпициклов, параллельны и равны отрезку, соединяющему центры Земли и Солнца. Отто Нейгебауэр (1899—1989) [13, с. 127—129] объяснил этот факт следующим образом. Если планета P (Меркурий или Венера) ближе к Солнцу S, чем Земля E (рис. 8, *а*, *б*), то в геоцентрической системе движение планеты по отношению к Земле состоит в том, что Солнце движется вокруг Земли по окружности радиуса ES, а планета P — вокруг Солнца по окружности радиуса SP. Эта окружность и является в данном случае эпициклом. Если же планета P (Марс, Юпитер или Сатурн) дальше от Солнца S, чем Земля E (рис. 9, *а*, *б*), то в геоцентрической системе движение планеты P по отношению к Земле состоит в том, что Солнце также движется вокруг Земли по окружности радиуса ES, а планета — вокруг Солнца по окружности радиуса SP. Но то же движение мы получим, если дополним фигуру SPE до параллелограмма $SPCE$, причем точка C движется вокруг Земли по окружности радиуса

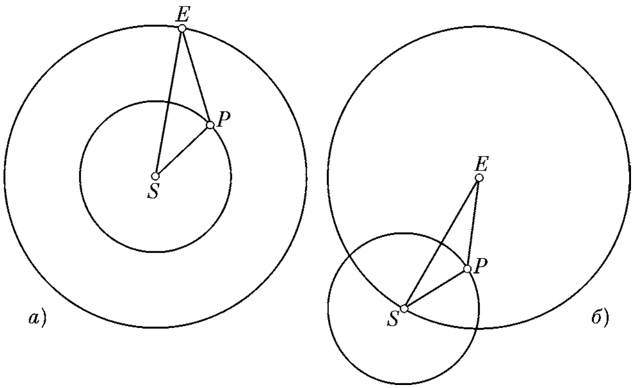


Рис. 8

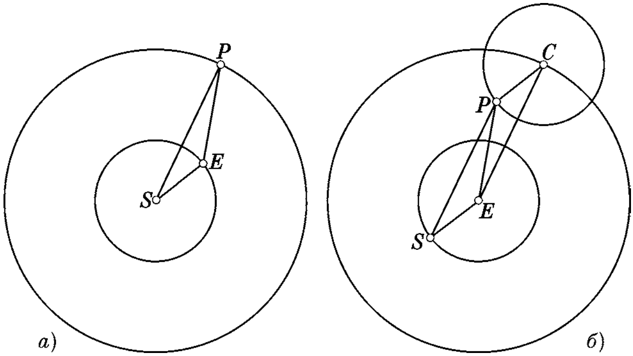


Рис. 9

$EC = SP$, а планета P движется вокруг точки C по окружности радиуса $CP = ES$. Последняя окружность и является в данном случае эпициклом, а окружность, описываемая точкой C, — деферентом. Поэтому отрезок CP, соединяющий центр эпицикла с центром планеты, обязательно равен и параллелен отрезку ES, соединяющему центры Земли и Солнца. Эта особенность теории движения планет указывает на то, что геоцентрическая система, которую Птолемей заимствовал у Аполлония, является модификацией гелиоцентрической системы одного из предшественников Аполлония, по-видимому, Аристарха Самосского.

В действительности, планеты обращаются вокруг Солнца не по окружностям, а по эллипсам с небольшим эксцентриситетом, и орбиты планет расположены не в одной плоскости, а в плоскостях, составляющих небольшие углы с плоскостью эклиптики, и для получения большего соответствия системы Птолемея с видимыми движениями планет в этой системе центры деферентов находятся на небольших расстояниях от центра Земли, а плоскости эпициклов составляют небольшие углы с плоскостью эклиптики.

Св. Ипполит (III в. н. э.) в «Опровержении всех ересей» упоминал еще один астрономический трактат Аполлония, в котором определялись расстояния от Земли до Солнца, Луны и планет.

Дальнейшее развитие механики и астрономии опровергло мнение Аристотеля о трех мирах и геоцентрическую систему.

Николай Коперник (1473—1543) заменил геоцентрическую систему Птолемея гелиоцентрической системой, в которой планеты движутся по деферентам и эпициклам.

Иоганнес Кеплер (1571—1630) доказал, что планеты Солнечной системы движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

Исаак Ньютон (1643—1727) на основе анализа законов Кеплера доказал, что законы механики на Земле и в космосе одни и те же.

В дальнейшем было доказано, что Солнце является не центром Вселенной, а одной из звезд.

Стереографическая проекция

При изображении звездного неба на картах и астрономических инструментах, а также при черчении географических карт часто применяется стереографическая проекция, т. е. проецирование сферы на плоскость из одного из полюсов сферы на касательную плоскость в другом полюсе или на плоскость, параллельную этой плоскости.

Стереографическая проекция обладает двумя замечательными свойствами: 1) окружности на сфере изображаются на плоскости окружностями или прямыми, 2) углы между кривыми на сфере изображаются на плоскости равными углами.

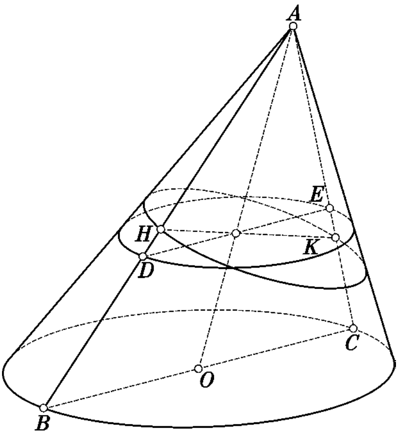


Рис. 10

Окружности, проходящие через центр проекции, изображаются на плоскости прямыми, это вытекает из того, что в этом случае все проецирующие лучи лежат в плоскости окружности и пересекаются с плоскостью проекции в точках общей прямой этих двух плоскостей.

Тот факт, что окружности, не проходящие через центр проекции, изображаются на плоскости окружностями, следует из предложения I_5 «Конических сечений» Аполлония. В этом предложении рассматривается наклонный круговой конус и доказывается, что в этом конусе, кроме семейства круговых сечений, параллельных его основанию, имеется второе семейство круговых сечений. Этот факт можно доказать следующим образом. Наклонный круговой конус с вершиной A обладает плоскостью симметрии, пересекающей окружность основания конуса в точках B и C (рис. 10). Треугольник ABC проходит через прямую, соединяющую вершину A конуса с центром O его основания, и, так как прямая AO является осью конуса, треугольник ABC называется осевым треугольником конуса.

Если мы пересечем конус плоскостью, перпендикулярной биссектрисе угла BAC, то эта плоскость пересечет поверхность конуса по эллипсу, и конус можно рассматривать как прямой эллиптический конус. Эллипс, ограничивающий основание этого конуса, обладает двумя осями симметрии — прямой, по которой его плоскость пересекается с плоскостью ABC, и перпендикулярной ей прямой. Поэтому наклонный круговой конус обладает двумя плоскостями симметрии — плоскостью ABC и плоскостью, проходящей через точку A и вторую ось симметрии эллипса. Отражения круговых сечений наклонного кругового конуса, параллельных его основанию, от второй плоскости его симметрии являются круговыми сечениями второго семейства.

Если DE — диаметр кругового сечения наклонного кругового конуса, лежащий в его осевой плоскости ABC, то отражение HK этого диаметра от второй плоскости симметрии конуса является диаметром одного из круговых сечений второго семейства, причем угол ADE равен углу AKH, а угол AED равен углу AHK.

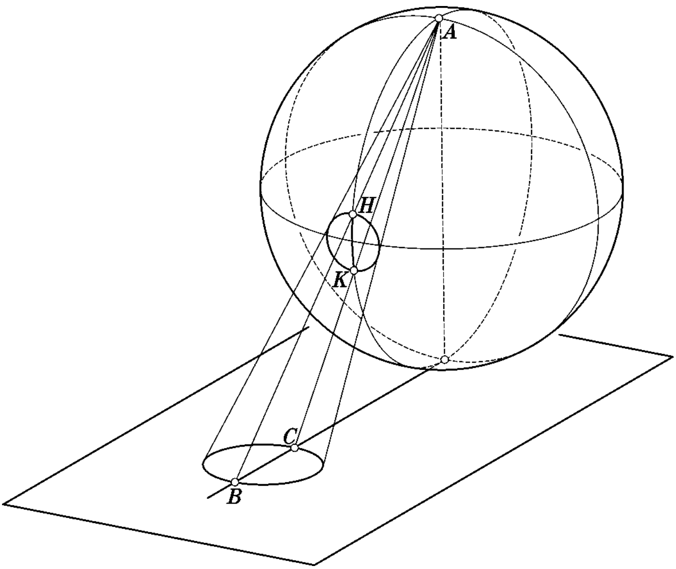


Рис. 11

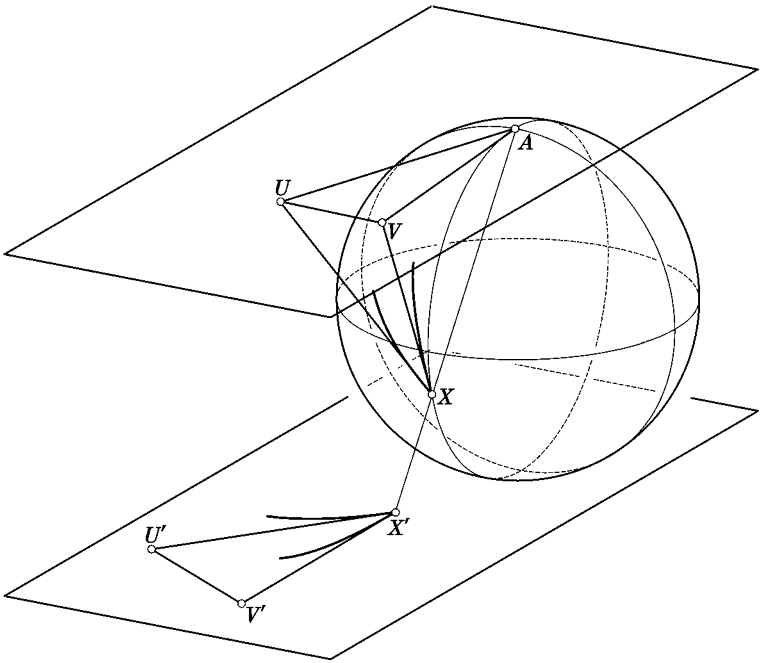


Рис. 12

Если окружность круга с диаметром HK, непараллельного плоскости проекции, проецируется из полюса A сферы на касательную плоскость в ее противоположном полюсе, то лучи, проецирующие точки окружности, являются прямолинейными образующими наклонного кругового конуса (рис. 11). Поверхность конуса пересекается с плоскостью проекции по окружности кругового сечения этого конуса, принадлежащего второму семейству, так как диаметр BC этой окружности составляет с прямыми AB и AC углы, равные углам AKH и AHK.

Если точка X на сфере проецируется в точку X' на плоскости, то две кривые на сфере, выходящие из точки X, изображаются на плоскости двумя кривыми, выходящими из точки X' (рис. 12). За угол между двумя пересекающимися кривыми принимается угол между касательными к ним в точке их пересечения. Пусть касательные к кривым, выходящим из точки X, — прямые XU и XV, пересекающие плоскость, проведенную параллельно плоскости проекции через центр проекции A, в точках U и V. Тогда отрезки XU и XV равны AU и AV как отрезки касательных, проведенных к сфере, между точкой их пересечения и точками касания. Поэтому треугольники XUV и AUV равны, и угол UXV равен углу UAV. Касательные $X'U'$ и $X'V'$ к кривым, выходящим из точки X', параллельны прямым AU и AV. Поэтому угол $U'X'V'$ равен углу UXV.

Астролябия

Аполлоний не только доказал теорему, из которой вытекает, что при стереографической проекции сферы на плоскость окружности на сфере, не проходящие через центр проекции, изображаются окружностями на плоскости, но и пользовался самой стереографической проекцией. Это видно из сообщения римского архитектора I в. н. э. Витрувия, который в своем сочинении «Десять книг об архитектуре» описывал инструмент, называемый «пауком» или «арахной» (*arachne*), о котором он писал, что его «изобрел астроном Евдокс, а иные говорят — Аполлоний» [8, с. 326]. Одной из составных частей «арахны» является барабан, на котором, по словам Витрувия, «нарисовано небо с зодиакальным кругом». Комментатор Витрувия Д. Барбаро описывал проекцию, применяемую в этом инструменте, следующим образом. «Мы воображаем, что глаз наш находится в точке полюса, противоположного нашему, и смотрим в направлении другого полюса» [8, с. 339]. Отсюда ясно, что эта проекция является стереографической, и арахна не могла быть изобретена Евдоксом, который жил в IV в. до н. э., когда стереографическая проекция еще не была известна.

Барабан арахны с изображением эклиптики и наиболее ярких неподвижных звезд мог вращаться с помощью гидравлического привода. Перед барабаном находилась неподвижная «паутина паука», состоящая из проволок.

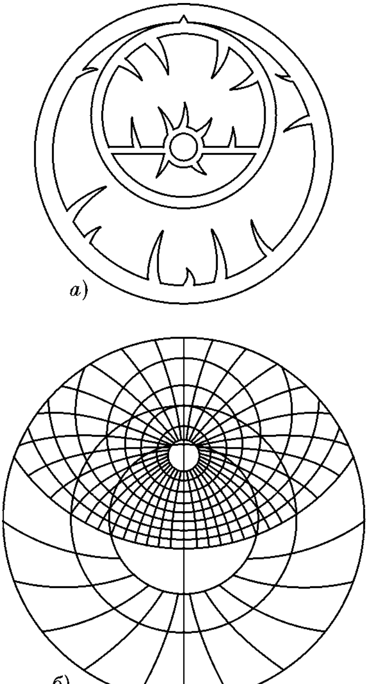
Эклиптика (зодиакальный круг) — большая окружность небесной сферы, по которой совершается видимое годичное движение Солнца. За сутки Солнце проходит дугу эклиптики немного меньше 1°. Эклиптика делится на 12 знаков зодиака, каждый из которых Солнце проходит в течение месяца. Знаки зодиака соответствуют зодиакальным созвездиям. Эклиптика пересекается с небесным экватором в начале знаков Овна и Весов, в которых Солнце находится в дни весеннего и осеннего равноденствий. Дальше всего от небесного экватора эклиптика отходит в начале знаков Рака и Козерога, в которых Солнце находится в дни летнего и зимнего солнцестояний. Точки эклиптики, наиболее удаленные от небесного экватора, при суточном вращении небесной сферы описывают окружности, называемые тропиками Рака и Козерога.

На «паутине паука» проволоками изображены три окружности небесной сферы, переходящие в себя при ее суточном вращении, — небесный экватор и тропики Рака и Козерога, дуги неподвижных окружностей небесной сферы — горизонта и кругов высоты (альмукантаратов), точки которых имеют равные высоты над горизонтом, а также «часовые линии». Экватор и тропики изображаются концентрическими окружностями, самая маленькая из которых изображает тропик Рака, а самая большая — тропик Козерога. Окружность, изображающая эклиптику, касается обеих окружностей, изображающих тропики. Здесь Аполлоний впервые встретился с задачей об окружности, касающейся нескольких окружностей. Этой задаче Аполлоний впоследствии посвятил свое сочинение «Касания».

Окружность, изображающая горизонт, пересекает окружность, изображающую небесный экватор, в двух ее диаметрально противоположных точках. Окружности, изображающие круги высоты, расположены выше окружности, изображающей горизонт. Здесь Аполлоний впервые встретился с пучком окружностей. Такой пучок окружностей Аполлоний рассмотрел впоследствии в сочинении «Плоские геометрические места». В настоящее время окружности этого пучка называют «окружностями Аполлония». Пучок окружностей, изображающий круги высоты, содержит две окружности нулевого радиуса, т. е. две точки, одна из которых изображает точку зенита, а другая — точку надира.

Ниже окружности, изображающей горизонт, расположены часовые линии, позволяющие определять точное время.

При пользовании арахной ночью измеряют высоту над горизонтом одной из изображенных на ней звезд, при пользовании арахной днем определяют высоту Солнца. Далее поворачивают барабан таким образом, чтобы изображение звезды или точки эклиптики, соответствующей дню наблюдения Солнца, попало бы под изображение круга высоты, равной измеренной высоте. В этом случае получается точное изображение всего звездного неба в момент измерения высоты звезды или Солнца. Поэтому для любой звезды или любой точки звездного неба круг высоты, находящийся над этой точкой, определяет высоту над горизонтом этой звезды или точки, а положение этой точки на круге высоты определяет азимут этой звезды или точки, и таким образом определяются координаты всех звезд и точек звездного неба в горизонтальной системе координат. В частности, определяются координаты «гороскопа»—точки пересечения эклиптики с восточной частью горизонта. Гороскоп играл важную роль в астрологических предсказаниях, весьма популярных в древности и в средние века.



а) *б)*

Рис. 13

Как известно, на земном экваторе небесный экватор перпендикулярен горизонту, на земном полюсе небесный экватор совпадает с горизонтом, а в местности, обладающей широтой φ, угол между земным экватором и горизонтом равен $90^\circ - \varphi$. Так как при стереографической проекции углы между кривыми изображаются в натуральную величину, в местности с широтой φ угол между изображениями небесного экватора и горизонта на барабане инструмента Аполлония также был равен $90^\circ - \varphi$. Инструмент Аполлония с его массивным барабаном изготовлялся для одной определенной местности наблюдения.

Аналогичный инструмент был описан Клавдием Птолемеем в «Планисферии», где он назывался «гороскопическим инструментом».

Впоследствии этот инструмент получил название астролябии (*astrolabon*), что означает «ухватывающий звезды». Термин *astrolabon* применялся в «Алмагесте» Птолемея как название армиллярной сферы — инструмента, состоящего из нескольких колец, с помощью которого определялись координаты звезд.

Окончательный вид астролябии, основанной на стереографической проекции, был создан александрийским астрономом IV в. н. э. Теоном, который называл его «малый астролабон». Теон заменил проволочную «паутину паука» неподвижным металлическим диском, называемым тимпаном, на котором были выгравированы окружности и дуги «паутины паука». Он заменил барабан узким металлическим колесом, которое могло вращаться вокруг центра инструмента и на котором были расположены кольцо, изображающее эклиптику, и острия, концы которых изображали яркие звезды. Это колесо, также называвшееся «пауком», располагалось над тимпаном, и через него можно было видеть окружности и дуги, изображенные на тимпане.

Этот инструмент был очень популярен на средневековом Востоке, где он назывался «астурлаб», и в средневековой Европе, где его называли *astrolabium*. Тимпаны средневековых астролябий изготовлялись для определенной широты местности наблюдения. Обычно к каждой астролябии были приложены 10—20 тимпанов для разных широт.

На рис. 13 изображены «паук» (*а*) и тимпан (*б*) средневековой восточной астролябии.

Действия со средневековыми астролябиями, по существу, не отличались от действий с инструментом Аполлония. Средневековые астролябии были небольшими переносными инструментами. Как правило, они представляли собой цилиндры диаметром 15—20 см и высотой 3—5 см. Верхнее основание цилиндра, на котором был расположен «паук», называлось «лицевой стороной» астролябии. Внутри цилиндра помещались тимпаны для различных широт. Нижнее основание цилиндра называлось «спинкой астролябии». Инструмент для измерения высот звезд и Солнца, который в случае инструмента Аполлония был отделен от него, на средневековых астролябиях помещался на их спинках. Он состоял из «алидады» — линейки с двумя диоптрами, вращающейся вокруг центра астролябии, и из градусной шкалы на ободе астролябии. Для измерения высоты светила астролябия подвешивалась в вертикальном положении, и ее алидада направлялась на светило.

О стереографической проекции и истории ее применения в астрономических инструментах см. [16, с. 485; 18, с. 116—125].

Глава 5

КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ

Конические сечения Менехма, Аристея и Евклида

Конические сечения впервые появились в работах греческого математика IV в. до н. э. Менехма, который с их помощью решил задачу удвоения куба, о которой мы говорили в главе 1.

В VII книге «Математического собрания» Папп писал: «Аполлоний дополнил четыре книги Евклида о конических сечениях и добавил к ним четыре другие, образуя восемь книг „Конических сечений“. Аристей, который написал пять книг „Телесных геометрических мест“, посвященных коническим сечениям, и [другие] предшественники Аполлония называли первую из трех конических кривых сечением остроугольного конуса, вторую — [сечением] прямоугольного [конуса], а третью — [сечением] тупоугольного [конуса]» [50, с. 503; 51, с. 114—115].

Аристей был старшим современником Евклида, его сочинение называлось «Телесные геометрические места» (*Topoi stereoi*). Античные математики называли «плоскими геометрическими местами» прямые и окружности, которые проводятся с помощью линейки и циркуля, а «телесными геометрическими местами» — конические сечения, возникающие при пересечении поверхности кругового конуса с плоскостью.

Сочинения Менехма, Аристея и Евклида о конических сечениях до нас не дошли. Те же названия конических сечений применял и Архимед. Под сечением прямоугольного конуса имелась в виду парабола, под сечением остроугольного конуса — эллипс, под сечением тупоугольного конуса — одна из двух ветвей гиперболы. Предшественники Аполлония определяли конические сечения как сечения поверхностей прямых круговых конусов плоскостями, перпендикулярными к одной из их прямолинейных образующих.

В главе 2 мы упоминали также, что в «Началах» Евклида конус определялся как тело, образуемое вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов.

На рис. 14, *а—в* изображены сечения прямых круговых конусов с вершинами A и диаметрами оснований BC плоскостями, перпендикулярными прямолинейным образующим AC этих конусов, пересекающими их в точках G. Плоскости конических сечений пересекают плоскости ABC по прямым GK, которые являются осями симметрии конических сечений. Из произвольных точек L сечений опустим перпендикуляры LK на их оси симметрии. Обозначим отрезки AG, GK и KL, соответственно, r, x и y. Эти три отрезка являются взаимно перпендикулярными ребрами прямоугольных параллелепипедов. Поэтому во всех трех случаях

$$AL^2 = r^2 + x^2 + y^2.$$

Отложим на прямых AC отрезки AM, равные AL. В случае параболы отрезок GM равен отрезку $GK = x$, поэтому $AM = r + x$ и

$$r^2 + x^2 + y^2 = (r + x)^2 = r^2 + 2rx + x^2,$$

т. е.

$$y^2 = 2rx. \tag{5.1}$$

Уравнение (5.1) является уравнением параболы в системе прямоугольных координат, осями которой служат ось симметрии параболы и касательная в ее вершине (рис. 15, *а*).

Менехм решил задачу об удвоении куба, равносильную уравнению (1.1), с помощью пересечения двух парабол $x^2 = ay$ и $y^2 = 2ax$ (рис. 16). Решение x уравнения совпадает с абсциссой точки пересечения этих двух парабол.

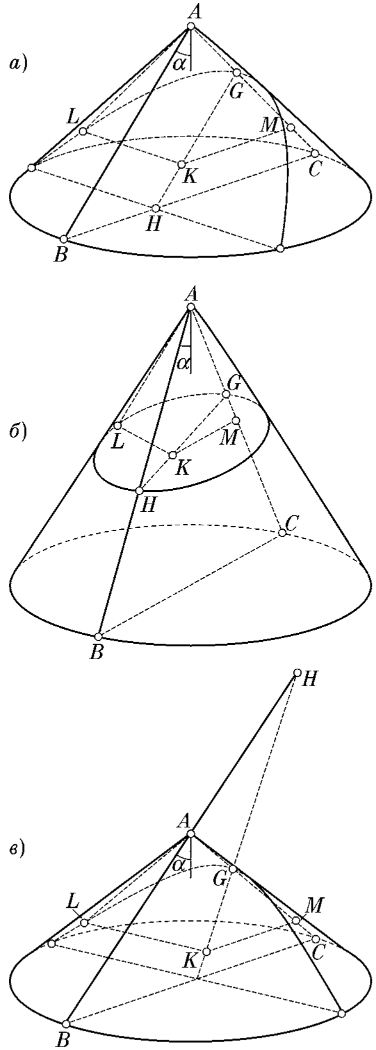


Рис. 14

Обозначим на рис. 14, *а—в* углы между осями конусов и их прямолинейными образующими через α. В случае параболы $\alpha = 45^\circ$, в случае эллипса $\alpha < 45^\circ$, в случае гиперболы $45^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Обозначим отрезки GH прямых GK между линиями AC и AB (рис. 14, *б*) и между линией AC и продолжением линии AB (рис. 14, *в*) через $2a$. В современной геометрии эти отрезки называются большой осью эллипса и вещественной осью гиперболы.

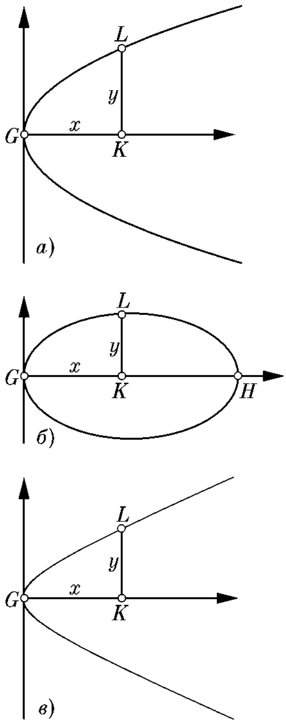


Рис. 15

В треугольниках AGH углы AGH — прямые, угол GAH в случае эллипса равен 2α, а в случае гиперболы равен $\pi-2\alpha$. Поэтому в случае эллипса

$$\frac{2a}{r}=\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1-\operatorname{tg}^2 \alpha},$$

а в случае гиперболы

$$\frac{2a}{r}=\operatorname{tg}(\pi-2\alpha)=\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha-1}.$$

В треугольниках GKM углы KGM — прямые, а углы GKM равны α. Поэтому $GM=x \operatorname{tg} \alpha$, и в случае эллипса и гиперболы

$$r^2+x^2+y^2=(r+x \operatorname{tg} \alpha)^2=$$
$$=r^2+2xr \operatorname{tg} \alpha+x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

т. е.

$$y^2=2xr \operatorname{tg} \alpha+x^2(\operatorname{tg}^2 \alpha-1).$$

Последнее уравнение в случае эллипса можно переписать в виде

$$y^2=2xr \operatorname{tg} \alpha-\frac{x^2 r \operatorname{tg} \alpha}{a}, \tag{5.2}$$

а в случае гиперболы — в виде

$$y^2=2xr \operatorname{tg} \alpha+\frac{x^2 r \operatorname{tg} \alpha}{a}. \tag{5.3}$$

Полагая в формулах (5.1)—(5.3) $r \operatorname{tg} \alpha=p$, мы можем переписать эти формулы в виде

$$y^2=2px, \tag{5.4}$$

$$y^2=2px-\frac{p}{a}x^2, \tag{5.5}$$

$$y^2=2px+\frac{p}{a}x^2. \tag{5.6}$$

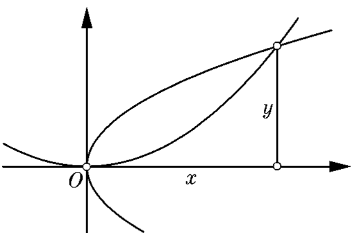


Рис. 16

Величина p в современной геометрии называется параметром конического сечения.

Величина x — корень уравнения (2.2) — также является абсциссой точки пересечения двух парабол $x^2=ay$ и $y^2=bx$.

Уравнение (5.5) является уравнением эллипса в системе прямоугольных координат, осями которой являются ось симметрии эллипса, содержащая его большую ось, и касательная к эллипсу в левом конце большой оси (рис. 15, *б*). Уравнение (5.6) является уравнением гиперболы в системе прямоугольных координат, осями которой являются ось симметрии гиперболы, содержащая ее вещественную ось, и касательная к гиперболе в правом конце вещественной оси (рис. 15, *в*).

На рис. 16 изображено решение Менехма задачи об удвоении куба с помощью пересечения двух парабол.

Под гиперболой Менехм, Евклид и Архимед имели в виду одну ветвь гиперболы. Архимед и, по-видимому, Евклид называли асимптоты гиперболы «прямыми, ближайшими к сечению тупоугольного конуса», и середину O оси GH гиперболы — точкой пересечения этих прямых. Точка O оси GH эллипса является центром симметрии эллипса.

В случае, когда малая полуось эллипса и мнимая полуось гиперболы равны b, параметр p равен b^2/a.

Поэтому уравнения (5.5) и (5.6) можно переписать в виде уравнений

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}x(2a-x), \tag{5.7}$$

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}x(2a+x). \tag{5.8}$$

Эти уравнения называются «уравнениями эллипса и гиперболы с двумя абсциссами» и могут быть записаны в виде

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}x_1x_2, \tag{5.9}$$

где в обоих случаях $x_1=x$, в случае эллипса $x_2=2a-x$, а в случае гиперболы $x_2=2a+x$.

В случае эллипса уравнение (5.9) можно получить из уравнения (2.1) окружности радиуса a сжатием ее к горизонтальному диаметру в отношении b/a. Гипербола при $a=b$ называется равносторонней гиперболой и определяется тем же уравнением (2.1). В случае произвольной гиперболы уравнение (5.9) может быть получено из уравнения (2.1) равносторонней гиперболы сжатием к ее вещественной оси или растяжением от этой оси в отношении b/a.

Предшественники Аполлония обычно определяли эллипс и гиперболу «уравнениями с двумя абсциссами».

Папп в комментариях к сочинению Евклида «Геометрические места на поверхностях» писал: «Пусть прямая AB задана по положению, пусть дана точка C в той же плоскости. Проведем прямую DC, опустим перпендикуляр DE [на прямую AB] и рассмотрим отношение прямой CD к прямой DE. Я утверждаю, что точка D находится на коническом сечении, которое является параболой, если это отношение равной величины к равной, эллипсом, если это отношение меньшей величины к большей, и гиперболой, если это отношение большей величины к меньшей» [50, с. 801; 51, с. 368—369]. Эти слова Паппа означают, что конические сечения являются геометрическими местами точек, отношения расстояний от которых до данной точки и до данной прямой постоянны. По-видимому, эти слова являются комментариями к некоторым теоремам о конических сечениях, скорее всего, к предложению о том, что парабола является геометрическим местом точек, равноотстоящих от некоторой точки и от некоторой прямой.

В современной геометрии точка C и прямая AB называются фокусом и директрисой конического сечения, а отношение CD/DE расстояний точек сечения от фокуса к их расстояниям от директрисы называется эксцентриситетом конического сечения и обозначается e.

Эксцентриситет e эллипса связан с коэффициентами a и p уравнения (5.5) соотношением

$$e^2=1-\frac{p}{a}. \tag{5.10}$$

Эксцентриситет e гиперболы связан с коэффициентами a и p уравнения (5.6) соотношением

$$e^2=\frac{p}{a}+1. \tag{5.11}$$

Поэтому уравнения (5.4), (5.5) и (5.6) можно переписать в виде единого уравнения

$$y^2=2px+(e^2-1)x^2. \tag{5.12}$$

В случае окружности $e=0$, в случае эллипса $0<e<1$, в случае параболы $e=1$, в случае гиперболы $e>1$.

Конические сечения Архимеда

Архимед называл конические сечения теми же терминами, что и другие предшественники Аполлония, но в русских переводах сочинений Архимеда их заменяли современными терминами.

Архимед в предложении I_4 сочинения «О коноидах и сфероидах», рассматривая эллипс с большой и малой полуосями a и b как результат сжатия окружности радиуса a к ее диаметру (рис. 17, *а*), доказал, что площадь фигуры, ограниченной этим эллипсом, равна πab. В «Квадратуре сечения прямоугольного конуса» Архимед вычислил площадь сегмента параболы, ограниченного хордой BC (рис. 17, *б*), и нашел, что эта площадь равна 4/3 площади треугольника ABC, вершина A которого является точкой касания прямой параллельной хорде BC. В современной терминологии точка A называется концом диаметра параболы, пересекающего хорду BC в ее середине.

Архимед рассматривал также поверхности, образуемые вращением эллипса, параболы и гиперболы вокруг осей их симметрии (рис. 18, *а—в*). Первую из этих поверхностей Архимед называл «сфероидом», т. е. похожим на сферу, вторую и третью — «коноидами», т. е. похожими на конус, причем поверхность вращения сечения прямоугольного конуса называл «прямоугольным коноидом», а поверхность вращения сечения тупоугольного конуса — «тупоугольным коноидом».

Современные математики называют сфероиды Архимеда эллипсоидами вращения, прямоугольные коноиды — параболоидами вращения, а тупоугольные коноиды — полостями двуполостных гиперболоидов вращения. Архимед различал вытянутые и сплющенные сфероиды.

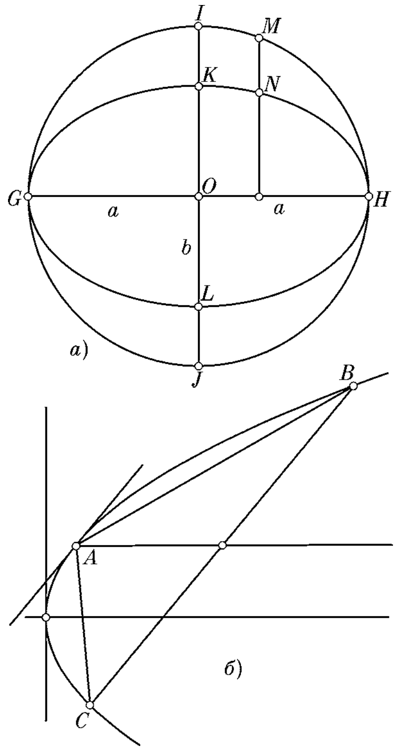


Рис. 17

В сочинении «О коноидах и сфероидах» Архимед вычислил объемы некоторых сегментов коноидов и сфероидов. В частности, он нашел, что объем сегмента сфероида, ограниченного его поверхностью и плоскостью, перпендикулярной оси вращения, которая делит эту ось пополам, равен удвоенному объему прямого кругового конуса, вписанного в этот сегмент. Это равносильно тому, что для сфероидов, полученных вращением эллипса с полуосями a и b, объем тела, ограниченного вытянутым сфероидом, равен $4\pi ab^2/3$, а объем тела, ограниченного сплющенным сфероидом, равен $4\pi a^2 b/3$.

Архимед доказал также, что объем сегмента прямоугольного коноида, ограниченного его поверхностью и плоскостью, перпендикулярной его оси, в полтора раза больше объема прямого кругового конуса, вписанного в этот сегмент. Архимед нашел, что объем сегмента тупоугольного коноида, ограниченного его поверхностью и плоскостью, перпендикулярной его оси, относится к объему вписанного в него прямого кругового конуса как $\frac{h+3a}{h+2a}$, где h — высота сегмента, a —

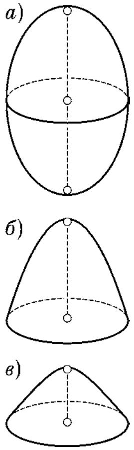


Рис. 18

вещественная полуось гиперболы, вращение которой образует коноид.

В предложении I_8 сочинения «О коноидах и сфероидах» Архимед рассматривал тело, ограниченное плоскостью эллипса и прямыми, соединяющими точки этого эллипса с некоторой точкой перпендикуляра, восставленного к плоскости эллипса в центре его симметрии. Архимед доказал, что поверхность этого эллиптического конуса является также поверхностью наклонного кругового конуса, который поэтому обладает двумя плоскостями симметрии, проходящими через вершину конуса и оси симметрии эллипса. Симметрии наклонного кругового конуса впоследствии изучались Аполлонием в предложении I_5 «Конических сечений».

Конические сечения Аполлония

В предисловии к I книге «Конических сечений», обращенном к Евдему Пергамскому, Аполлоний дал краткий обзор всех восьми книг своего труда. «Четыре первые из этих восьми книг посвящены изложению начал [теории]. Первая книга содержит способ получения трех сечений и „противоположных гипербол“, а также их основные свойства, изложенные более полным и более общим способом, чем у других писавших об этом. Вторая книга — о свойствах диаметров и осей сечений, асимптот и прочего необходимого для обсуждений. Из этой книги ты узнаешь, что я называю диаметрами и осями. Третья книга содержит много замечательных теорем, полезных для построения телесных геометрических мест и для определения возможностей решений. Большая часть самых прекрасных из этих теорем являются новыми. Из этих теорем видно, что решение Евклида задачи о „геометрическом месте к трем и четырем прямым“ было случайным и не совсем удачным, довести эту задачу до конца было невозможно без моих новых открытий. В четвертой книге рассматривается, сколькими способами конические сечения пересекаются между собой и с окружностью круга. Эта книга содержит также то, что не было известно ни одному из моих предшественников, а именно, во скольких точках две противоположные гиперболы могут пересекаться одним коническим сечением, окружностью круга или двумя противоположными гиперболами. Остальные книги посвящены дальнейшему развитию теории. Одна из них [пятая] более подробно рассматривает минимумы и максимумы, другая [шестая] — равные и подобные конические сечения, следующая [седьмая] рассматривает теоремы, определяющие возможности решений, и последняя [восьмая] содержит решения задач, определенные [теоремами предыдущей книги]» [25, т. 1, с. 194—196].

Под «тремя сечениями» здесь имеются в виду парабола, эллипс и одна ветвь гиперболы, под «противоположными гиперболами» — обе ветви гиперболы. О геометрических местах к трем и четырем прямым мы будем говорить в главе 6.

В начале I книги «Конических сечений» Аполлония приводятся восемь «первых определений». В первых трех из них определяется коническая поверхность как поверхность, образованная прямыми линиями, проходящими через фиксированную точку и точки окружности, плоскость которой не проходит через эту точку. Фиксированная точка называется вершиной конической поверхности, а круг, ограниченный окружностью, — основанием этой поверхности. Прямая, соединяющая вершину с центром основания, называется осью поверхности. Прямые, образующие коническую поверхность, продолжаются в обе стороны.

Тело, ограниченное конической поверхностью и ее основанием, называется конусом. Вершина и основание конической поверхности называются также вершиной и основанием конуса. Отрезок оси конической поверхности между ее вершиной и основанием называется осью конуса.

Конус называется прямым, если его ось перпендикулярна плоскости основания, и наклонным, если ось наклонена к этой плоскости. Тем самым Аполлоний определил прямой и наклонный круговые конусы.

Далее рассматриваются плоские кривые линии. В том случае, когда в плоской кривой линии проведены параллельные хорды и середины этих хорд лежат на одной прямой, эта прямая называется диаметром кривой линии. Конец диаметра называется вершиной плоской кривой линии.

В том случае, когда точки двух плоских кривых линий соединяются параллельными прямолинейными отрезками, и прямая линия, содержащая один из этих отрезков, является диаметром обеих кривых линий, отрезок этой прямой линии между двумя кривыми линиями называется поперечным диаметром этих кривых линий, а если середины параллельных отрезков лежат на одной прямой линии, эта прямая линия называется восставленным диаметром пары кривых линий. Концы поперечного диаметра пары кривых линий называются вершинами этих линий.

Аполлоний называет половины параллельных хорд между кривой линией и ее диаметром «приложенными по порядку». В средневековых латинских переводах «Конических сечений» это выражение переводилось *ordinatim applicatae*, откуда произошел термин «ординаты», которым мы будем переводить выражение Аполлония «приложенные по порядку».

Два диаметра называются сопряженными, если один из них параллелен ординатам, проведенным к другому.

В том случае, когда диаметр плоской кривой линии или пары кривых линий перпендикулярен параллельным хордам, этот диаметр называется осью кривой линии или пары кривых линий. Оси кривых линий и пар кривых линий являются их осями симметрии.

В дальнейшем Аполлоний рассматривает диаметры, вершины, ординаты и оси параболы, эллипса и гиперболы, а также поперечные и восставленные диаметры пары противоположных гипербол.

Термин «диаметр» первоначально применялся только к окружности круга.

Предшественники Аполлония называли диаметрами конического сечения то, что Аполлоний называл осями. Об этом изменении терминологии Аполлоний писал в предисловии к I книге. По-видимому, этим объясняется то, что Аполлоний называл «вершинами» концы любого диаметра, хотя его предшественники называли так только концы осей.

Современные математики применяют термины «диаметр» и «ось» для конических сечений в том же смысле, что и Аполлоний, словом «вершина» называют не любую точку конического сечения, как это делал Аполлоний, а только концы осей сечения.

В предложении I_1 «Конических сечений» Аполлоний доказывал, что прямая, соединяющая вершину конической поверхности с любой ее точкой, целиком лежит на этой поверхности, т. е. является ее прямолинейной образующей.

В предложении I_2 доказывается, что прямолинейный отрезок, соединяющий две точки одной полости конической поверхности и не лежащий на ее прямолинейной образующей, находится внутри конической поверхности, а продолжения этого отрезка находятся вне этой поверхности.

У Аполлония отсутствует доказательство того, что прямолинейный отрезок, соединяющий две точки различных полостей конической поверхности и не лежащий на ее прямолинейной образующей, находится вне конической поверхности, а продолжения этого отрезка находятся внутри этой поверхности. Это доказательство отсутствует, по-видимому, потому, что такая теорема не доказывается в «Началах конических сечений» Евклида.

В предложении I_3 доказывается, что сечение кругового конуса плоскостью, проходящей через его вершину, является треугольником, откуда следует, что сечение конической поверхности плоскостью, проходящей через ее вершину, является парой пересекающихся прямых.

В предложении I_4 доказывается, что сечение кругового конуса плоскостью, параллельной его основанию, является кругом, откуда следует, что сечение конической поверхности плоскостью, параллельной ее основанию, является окружностью.

Предложение I_5, важное для теории стереографической проекции, мы рассматривали в главе 4.

В предложении I_6 доказывается, что если в наклонном круговом конусе с вершиной A и основанием BC проведен осевой треугольник

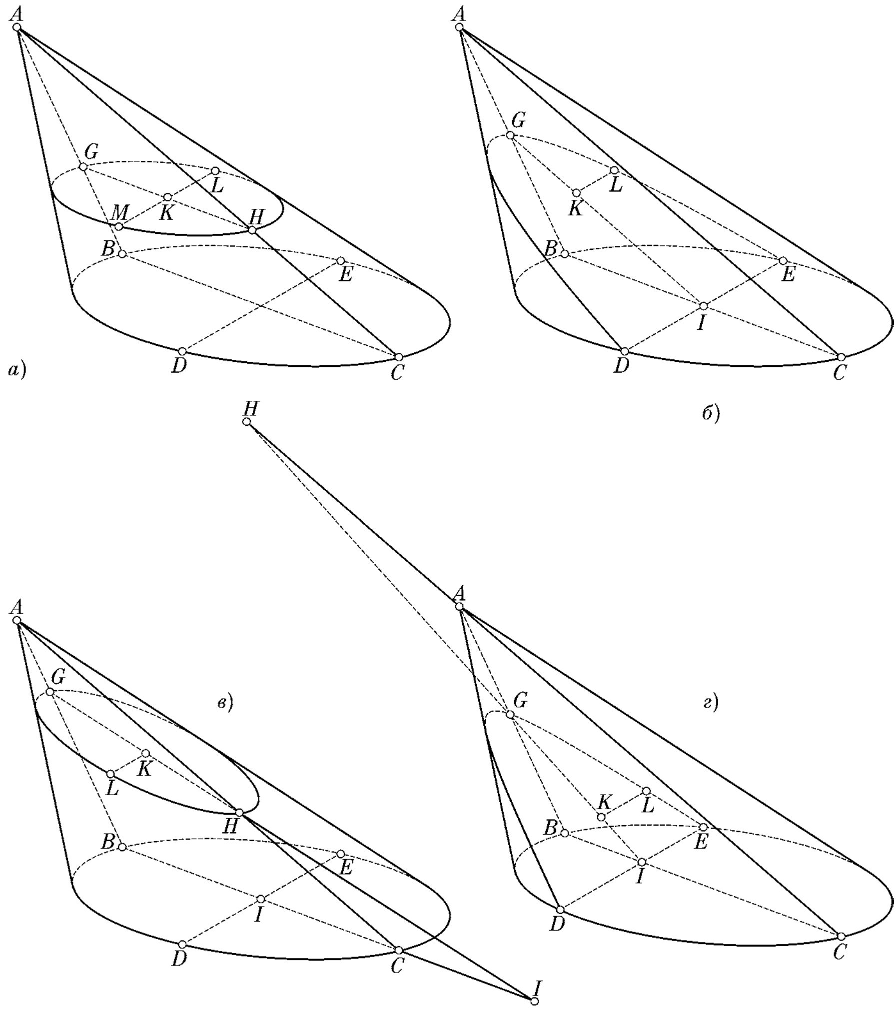


Рис. 19

ABC, проходящий через его ось, и в его основании проведена линия DE, перпендикулярная диаметру BC основания, то если из точки L поверхности конуса, не лежащей на сторонах треугольника ABC, провести параллельно прямой DE прямую LK, пересекающую плоскость ABC в точке K, и если продолжить ее до пересечения с поверхностью конуса в точке M, то отрезок KM равен отрезку LK (рис. 19, a).

В предложении I_7 рассматриваются сечения конической поверхности плоскостями общего вида. Пусть коническая поверхность с вершиной A и с основанием BC пересекается плоскостью, высекающей из плоскости основания конуса прямую DE. Проведем диаметр основания BC перпендикулярно прямой DE и построим осевой треугольник ABC конуса, ограниченного конической поверхностью и ее основанием. Пусть плоскость конического сечения пересекает прямую AB в точке G, а прямую BC в точке I. Тогда прямая GI делит каждую из хорд конического сечения, параллельных прямой DE, на две равные части, т. е. диаметр этого конического сечения расположен на прямой GI, а хорды, параллельные линии DE, являются ординатами, проведенными к этому диаметру. На рис. 19, *б—г* изображены случаи, когда коническое сечение является параболой, эллипсом или гиперболой. Доказательство этого утверждения вытекает из предложения I_6.

Заметим, что если провести через точку G плоскость, параллельную основанию конуса, она пересечет плоскость конического сечения по прямой, параллельной DE. Эта прямая является касательной к коническому сечению в точке G. Конические сечения, которые рассматриваются в предложении I_7 и в последующих предложениях Аполлония, высекаются из конических поверхностей произвольными плоскостями, а не только плоскостями, перпендикулярными прямолинейным образующим этих поверхностей. Поэтому названия конических сечений, которыми пользовались предшественники Аполлония, теряют смысл, и Аполлоний заменил эти названия новыми. В отличие от предшественников Аполлония, которые рассматривали только плоские сечения прямых круговых конусов, конические сечения, которые рассматривал Аполлоний, высекаются также из наклонных круговых конусов, и, помимо сечений одной полости конической поверхности, он рассматривал сечения обеих полостей этой поверхности.

В предложении I_8 Аполлоний находит условия того, что конические сечения «могут быть неопределенно продолжены», т. е., выражаясь языком современной геометрии, простираются в бесконечность.

В предложении I_9 определяются условия, когда конические сечения не являются окружностями. Предложение I_{10} устанавливает, что конические сечения являются выпуклыми линиями. Здесь впервые появляются понятия внешних и внутренних точек конических сечений. Предложения об этих точках аналогичны предложениям о внутренних и внешних точках кругов в III книге «Начал» Евклида. Внутренние и внешние точки кругов являются такими точками, расстояния которых до центра круга меньше или больше радиуса круга. Это метрическое определение неприменимо для конических сечений. Аполлоний не дает определения внутренних и внешних точек конических сечений, но, по существу, переносит это понятие с кругов на конические сечения с помощью проецирования из вершины конической поверхности.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Координаты Аполлония

В главе 5 мы условились, что если L — произвольная точка конического сечения, то прямолинейный отрезок LK, проведенный параллельно прямой DE от точки L до диаметра GI конического сечения, мы называем ординатой точки L. Линию GK от вершины конического сечения до точки K Аполлоний называл «отсеченной от вершины». В средневековых латинских переводах «Конических сечений» это выражение переводилось *ex verticis abscissa*, откуда произошел термин «абсцисса», которым мы будем переводить выражение Аполлония «отсеченная от вершины».

Роль оси абсцисс у Аполлония играет произвольный диаметр конического сечения, роль оси ординат — касательная к сечению в конце этого диаметра (рис. 20, *а—в*).

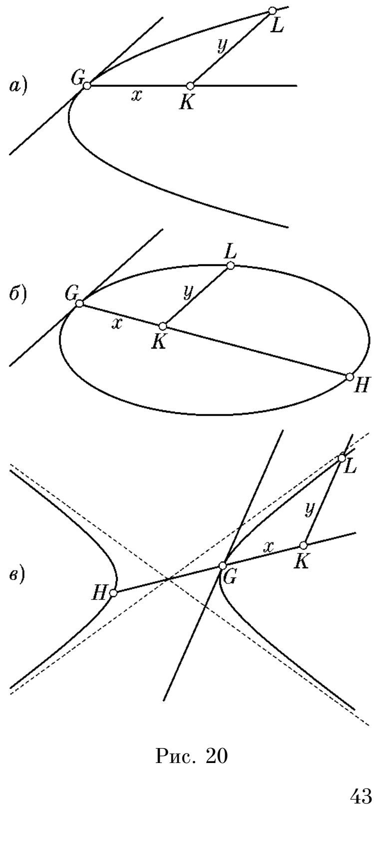


Рис. 20

Уравнения конических сечений у Аполлония, как и уравнения Евклида и Архимеда, выражены словесно в терминах геометрической алгебры, в которых роль произведений двух линий играют прямоугольники, стороны которых равны этим линиям, а роль произведений линий на себя играют квадраты, построенные на этих линиях. Так как эти выражения у Аполлония встречаются очень часто, он применял их в сокращенном виде и называл прямоугольник со сторонами AB и $B\Gamma$ «под $AB\Gamma$» (*hypo* $AB\Gamma$), прямоугольник со сторонами AB и $\Gamma\Delta$ «под AB, *ГΔ*» (*hypo AB*, *ГΔ*), а квадрат, построенный на линии *AB*, — «над *AB*» (*apo AB*).

Евклид и Архимед связывали с каждым коническим сечением одну или две системы прямоугольных координат, Аполлоний связывал с каждым коническим сечением бесконечное множество систем координат, определяемых диаметрами этого сечения, эти системы координат могут быть как прямоугольными, так и косоугольными.

В современной аналитической геометрии, основанной П. Ферма и Р. Декартом, системы координат не связаны ни с какими геометрическими образами. Хотя современная аналитическая геометрия существенно отличается от аналитической геометрии Аполлония, мы постоянно применяем термины «абсцисса», «ордината», происходящие от выражений Аполлония.

Аполлоний называл полученное им уравнение конического сечения словом *symptoma*, означающим «совпадение, случай».

Координатный угол

Обозначим угол между плоскостью конического сечения и плоскостью основания конуса через β, а угол между плоскостью осевого треугольника конуса и плоскостью, пересекающей основание конуса по линии BC под прямым углом, через λ. Направим три взаимно ортогональных единичных вектора $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ следующим образом: $\vec{i}$ — по прямой BC, $\vec{j}$ — по прямой DE, $\vec{k}$ — перпендикулярно плоскости основания конуса, а также единичный вектор $\vec{h}$ по оси конуса и единичный вектор $\vec{l}$ по диаметру IG конического сечения (рис. 21).

Векторы $\vec{h}$ и $\vec{l}$ можно записать в виде $\vec{h}=\vec{j}\sin\lambda+\vec{k}\cos\lambda$, $\vec{l}=-\vec{i}\cos\beta+\vec{h}\sin\beta=-\vec{i}\cos\beta+(\vec{j}\sin\lambda+\vec{k}\cos\lambda)\sin\beta$. Поэтому косинус угла ω, равный скалярному произведению $\vec{l}\cdot\vec{j}$, запишется как

$$\cos\omega=\vec{l}\cdot\vec{j}=\sin\lambda\sin\beta. \tag{6.1}$$

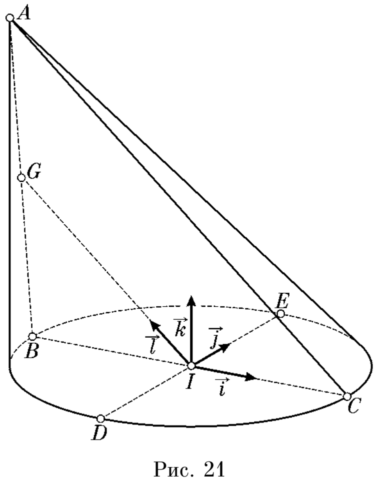


Рис. 21

Формула (6.1) показывает, что система координат Аполлония является прямоугольной только в тех случаях, когда угол β или λ равен нулю.

В случае, когда $\beta=0^\circ$, плоскость конического сечения параллельна плоскости основания конуса, и коническое сечение является окружностью, где диаметры перпендикулярны хордам, которые они делят пополам.

В случае, когда $\lambda=0^\circ$, вектор $\vec{h}$ совпадает с вектором $\vec{k}$, и круговой конус является прямым. Векторы $\vec{l}$ и $\vec{j}$

ортогональны также в случае, когда плоскость конического сечения антипараллельна плоскости основания конуса, так как обе эти плоскости перпендикулярны плоскости осевого треугольника, и коническое сечение является окружностью.

Прямая и поперечные стороны

Уравнения конических сечений, найденные Аполлонием, выражаются теми же формулами (5.4), (5.5), (5.6), что и у его предшественников, однако геометрический смысл коэффициентов в уравнениях Аполлония отличается от геометрического смысла коэффициентов в уравнениях его предшественников.

Аполлоний называл линию $2p$ «прямой стороной» (*orthia pleura*, в латинских переводах *latus rectum*), так как эта линия, возможно, уменьшенная или увеличенная на некоторый отрезок, является одной из сторон прямоугольника, равновеликого квадрату ординаты некоторой точки конического сечения. Аполлоний изображал линию $2p$ отрезком GF, перпендикулярным диаметру GI.

Аполлоний называл линию $2a$ «поперечной стороной» (*plagia pleura*, в латинских переводах *latus transversum*), так как эта линия, изображаемая на рис. 19, *в, г* и рис. 20, *б, в* отрезками GH, является диаметром эллипса или двух противоположных гипербол.

Уравнение параболы

В предложении I_{11} Аполлоний определяет прямую сторону параболы следующим образом. «Проведи линию GF под прямым углом к линии GI и пусть она будет такой, что „на BC“ относится к „под BAC“ как GF к GA» [25, т. 1, с. 232], т. е. линия GF определяется пропорцией

$$\frac{GF}{GA}=\frac{BC^2}{BA\cdot AC}. \qquad (6.2)$$

Аполлоний получает уравнение (5.4) параболы следующим образом. Если L — произвольная точка параболы DGE (рис. 22), из точки L проводится прямая LK параллельно прямой DE до диаметра GI параболы. Через точку K диаметра проводится прямая MN параллельно линии BC до сторон AB и AC треугольника ABC. Плоскость

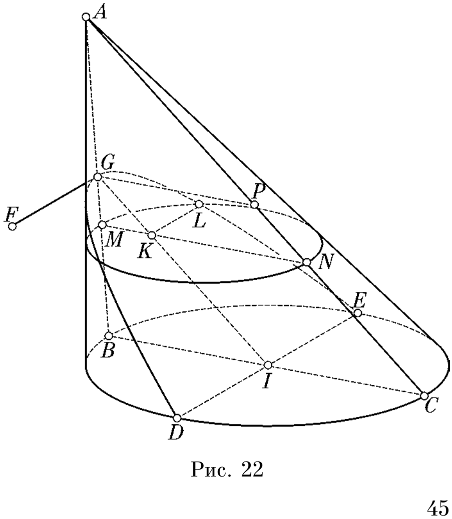


Рис. 22

LKM параллельна плоскости основания конуса, поэтому эта плоскость высекает из поверхности конуса окружность LMN. В силу предложения II_{14} «Начал» Евклида имеет место равенство

$$KL^2 = MK \cdot KN. \tag{6.3}$$

Из соотношения (6.2) в силу предложения VI_{23} «Начал» Евклида вытекает, что отношение GF/GA составлено из отношений BC/BA и BC/AC.

Из точки G проведем параллельно линии BC прямую GP до прямой AC. Тогда треугольник AGP будет подобен треугольнику ABC, и имеет место пропорция $BC/AB = GP/AG$. Отрезок GP равен KN, следовательно,

$$\frac{BC}{AB} = \frac{KN}{AG}.$$

Из подобия треугольников ABC и GMK вытекает пропорция

$$\frac{BC}{AB} = \frac{MK}{GK}.$$

Поэтому отношение GF/GA составлено также из отношений MK/GK и KN/AG. Поэтому в силу предложения VI_{23} «Начал» имеет место пропорция

$$\frac{GF}{GA} = \frac{MK \cdot KN}{GK \cdot AG}.$$

В силу равенства (6.3) имеет место также пропорция

$$\frac{GF}{GA} = \frac{KL^2}{GK \cdot AG}. \tag{6.4}$$

Обозначим прямую сторону параболы GF через $2p$, а отрезок GA — через r. Отрезки GK и KL являются абсциссой x и ординатой y точки L параболы. Поэтому пропорцию (6.4) можно переписать в виде

$$\frac{2p}{r} = \frac{y^2}{xr},$$

что равносильно уравнению (5.4). В предложении I_{11} угол BAC может не быть прямым. Поэтому Аполлоний заменил старое название конического сечения (5.4) «сечение прямоугольного конуса» новым. Поскольку в силу этого уравнения квадрат ординаты y всякой точки этой кривой равновелик прямоугольнику, приложенному к отрезку $2p$ и имеющему высоту, равную абсциссе x этой точки, Аполлоний назвал это коническое сечение «приложением» (*parabole*), откуда произошел термин «парабола».

Уравнение гиперболы

В предложении I_{12} Аполлоний определяет поперечную сторону гиперболы как продолжение GH ее диаметра GI до второй полости конической поверхности, а для определения прямой стороны гиперболы он проводит прямую AJ параллельно диаметру GI до стороны BC треугольника ABC (рис. 23) и определяет прямую сторону гиперболы GF следующим образом. «Пусть линия GF будет проведена под прямым углом к диаметру GI, и пусть „над AJ“ относится к „под BJC“ как GH к GF» [25, т. 1, с. 236], т. е. линия GF определяется пропорцией

$$\frac{GH}{GF}=\frac{AJ^2}{BJ\cdot JC}. \tag{6.5}$$

Аполлоний получает уравнение (5.6) следующим образом. Пусть L — произвольная точка гиперболы DGE, из точки L проводится прямая LK параллельно прямой DE до диаметра GI гиперболы. Через точку K диаметра GI проводится прямая MN параллельно линии BC до сторон AB и AC треугольника ABC. Плоскость LKM также параллельна плоскости основания конуса, поэтому эта плоскость высекает из поверхности конуса окружность LMN, и здесь также имеет место равенство (6.3).

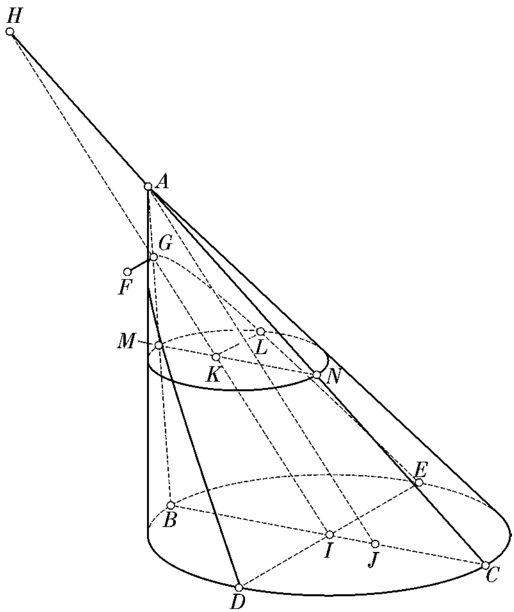


Рис. 23

Из соотношения (6.5) в силу предложения VI_{23} «Начал» Евклида вытекает, что отношение GH/GF составлено из отношений AJ/BJ и AJ/JC. Из подобия треугольников ABJ и GMN вытекает пропорция $AJ/BJ=GK/MK$. Из подобия треугольников AJC и HKN вытекает пропорция $AJ/JC=HK/KN$. Отсюда следует, что отношение GH/GF составлено также из отношений GK/MK и HK/KN, т. е. из отношений GK/MK и $(HG+GK)/KN$.

В силу предложения VI_{23} «Начал» Евклида имеет место пропорция

$$\frac{GH}{GF}=\frac{GK^2+GK\cdot GH}{MK\cdot KN},$$

т. е. в силу равенства (6.3)

$$\frac{GH}{GF}=\frac{GK^2+GK\cdot GH}{KL^2}. \tag{6.6}$$

Обозначим прямую и поперечную стороны гиперболы $GF=2p$ и $GH=2a$ и координаты точки гиперболы $GK=x$ и $KL=y$. Поэтому пропорцию (6.6) можно переписать в виде

$$\frac{2a}{2p}=\frac{x^2+2ax}{y^2},$$

что равносильно уравнению (5.6). В предложении I_{12} угол BAC может не быть тупым. Поэтому Аполлоний заменил старое название конического сечения (5.6) «сечение тупоугольного конуса» новым. Поскольку в силу этого уравнения квадрат ординаты всякой точки этой кривой равновелик прямоугольнику, «приложенному» к отрезку $2p$, увеличенному на отрезок xp/a, и имеющему высоту, равную абсциссе x этой точки, Аполлоний назвал это коническое сечение «избыток» (*hyperbole*), откуда произошел термин «гипербола».

В предложении I_{14} Аполлоний доказывает, что пара противоположных гипербол определяется тем же уравнением (5.6).

Уравнение эллипса

В предложении I_{13} Аполлоний определяет поперечную сторону эллипса как его диаметр GH и прямую сторону эллипса точно так же, как прямую сторону гиперболы [25, т. 1, с. 240], т. е. пропорцией (6.5).

Аполлоний получает уравнение (5.5) эллипса следующим образом. Пусть L — произвольная точка эллипса GLH (рис. 24), из точки L проводится прямая LK параллельно прямой DE до диаметра GH эллипса. Через точку K диаметра GH проводится прямая MN параллельно линии BC до сторон AB и AC треугольника ABC. Плоскость LKM параллельна плоскости основания конуса, поэтому эта плоскость

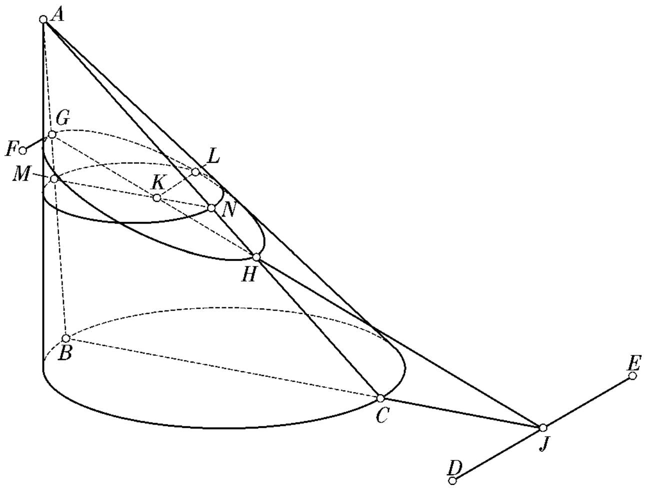


Рис. 24

высекает из поверхности конуса окружность MLN, и имеет место равенство (6.3).

Из соотношения (6.5) в силу предложения VI_{23} «Начал» Евклида вытекает, что отношение GH/GF составлено из отношений AJ/BJ и AJ/JC. В силу подобия треугольников ABJ и GMK и треугольников AGC и HKN отношение GH/GF составлено также из отношений GK/MK и HK/KN, т. е. из отношений GK/MK и $(GH-GK)/KN$.

В силу предложения VI_{23} «Начал» имеет место пропорция

$$\frac{GH}{GF}=\frac{GK\cdot GH-GK^2}{MK\cdot KN},$$

т. е. в силу равенства (6.3)

$$\frac{GH}{GF}=\frac{GK\cdot GH-GK^2}{KL^2}. \tag{6.7}$$

Обозначим прямую и поперечную стороны эллипса $GF=2p$ и $GH=$ $=2a$ и координаты точек эллипса $GK=x$ и $KL=y$. Поэтому пропорцию (6.7) можно записать в виде

$$\frac{2a}{2p}=\frac{2ax-x^2}{y^2},$$

что равносильно уравнению (5.5) эллипса.

В предложении I_{13} угол BAC может не быть острым. Поэтому Аполлоний заменил старое название конического сечения (5.5) «сечение остроугольного конуса» новым. Поскольку в силу этого уравнения квадрат ординаты y всякой точки этой кривой равновелик прямоугольнику, «приложенному» к отрезку $2p$, уменьшенному на отрезок xp/a, и имеющему высоту, равную абсциссе x этой точки, Аполлоний назвал это коническое сечение «недостаток» (*elleipsis*), откуда произошел термин «эллипс».

Уравнения (5.4), (5.5) и (5.6) Аполлония также можно записать в единообразной форме (5.12). Величину e, входящую в это уравнение и определяемую для эллипса и гиперболы соотношениями (5.10) и (5.11), мы также будем называть эксцентриситетом конического сечения. Эта величина, как и величины a и p, зависит от того диаметра конического сечения, который принимается за ось абсцисс уравнения этого конического сечения.

Построение конических сечений

Для построения точки параболы с данной абсциссой x Аполлоний рассматривает прямоугольник $GKRF$, сторонами которого являются прямая сторона параболы $GF=2p$ и абсцисса данной точки $GK=$ $=x$ (рис. 25, *а*), и находит сторону y квадрата, равновеликого этому прямоугольнику (рис. 26, *а*). Величина y равна ординате данной точки параболы.

Для построения точки гиперболы с данной абсциссой x Аполлоний рассматривает прямоугольник $GKRF$, сторонами которого являются прямая сторона гиперболы $GF=2p$ и абсцисса данной точки $GK=$ $=x$, соединяет точки H и F прямой линией и продолжает эту прямую до пересечения с прямой KR в точке S, а затем строит прямоугольник $FRST$ со сторонами FR и RS (рис. 25, *б*). Из подобия прямоугольных треугольников HGF и FTS с катетами $GH=2a$, $GF=2p$ и с катетами $TS=x$, FT вытекает, что $FT=px/a$. Поэтому площадь прямоугольника $FKST$ равна правой части уравнения (5.6) гиперболы. Далее Аполлоний находит сторону y квадрата, равновеликого прямоугольнику $GKST$ (рис. 26, *б*). Величина x равна ординате данной точки гиперболы.

Для построения точки эллипса с данной абсциссой x Аполлоний рассматривает прямоугольник $GKRF$, сторонами которого являются прямая сторона эллипса $GF=2p$ и абсцисса данной точки $GK=x$, соединяет точки H и F прямой линией и находит точку S пересечения прямых HF и KR, проводит из точки S прямую ST параллельно линии GK до линии GF (рис. 25, *в*). Из подобия прямоугольных треугольников HGF и FRT с катетами $GH=2a$, $GF=2p$ и с катетами $RF=x$ и FT вытекает, что $FT=px/a$. Поэтому площадь прямоугольника $FKST$ равна правой части уравнения (5.5) эллипса. Далее Аполлоний находит сторону y квадрата, равновеликого прямоугольнику $GKST$ (рис. 26, *в*). Величина y равна ординате данной точки эллипса.

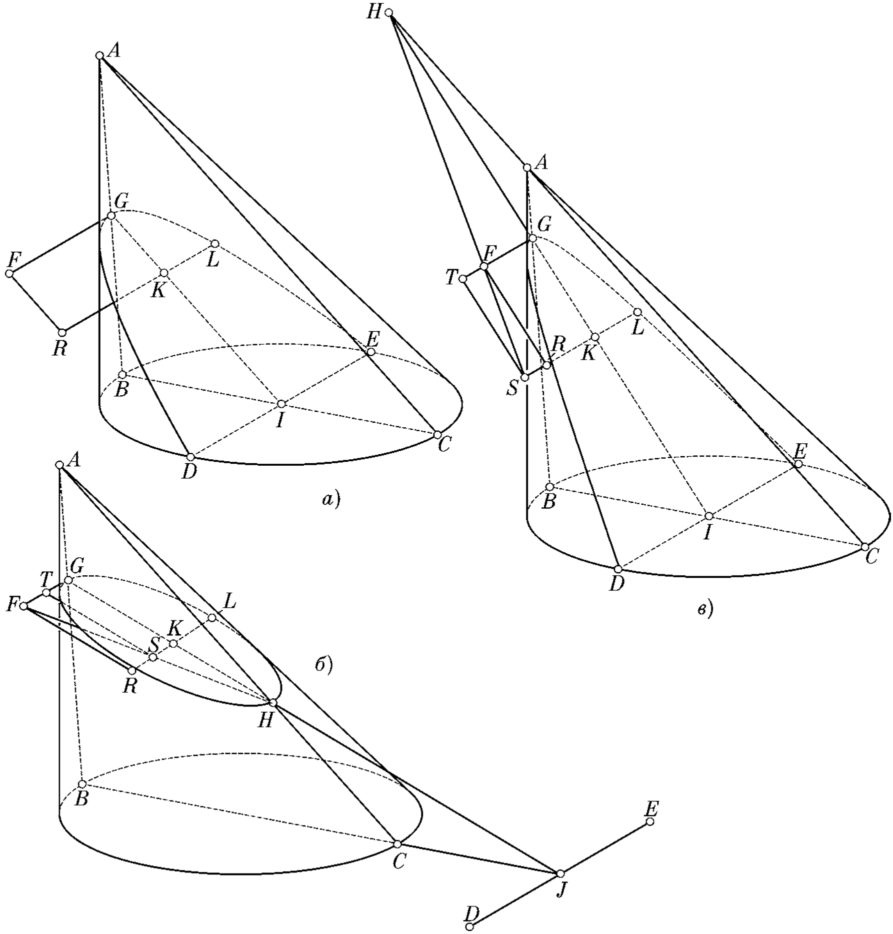


Рис. 25

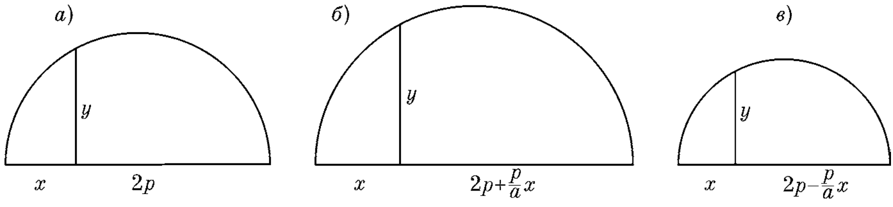


Рис. 26

Предложения I_{52}—I_{60} являются задачами построения конических сечений по некоторым прямолинейным отрезкам, заданным по величине и положению.

Выражение прямой стороны через углы, определяющие коническое сечение

Формулы (6.2) и (6.5) позволяют выразить прямую сторону конического сечения через углы осевого треугольника ABC конуса и угол GIB между диаметром конического сечения и прямой BC. Обозначим углы при вершинах A, B и C осевого треугольника через 2α, γ и δ, а угол GIB — через β (рис. 27, *а*—*в*).

В силу теоремы синусов плоской тригонометрии для треугольника ABC получаем равенство

$$\frac{BC}{\sin 2\alpha}=\frac{AC}{\sin\gamma}=\frac{AB}{\sin\delta}. \tag{6.8}$$

В случае параболы диаметр GI параллелен стороне AC, откуда следует, что $\beta=\delta$. Поэтому формула (6.2) равносильна формуле

$$\frac{2p}{r}=\frac{\sin^2 2\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}. \tag{6.9}$$

В силу теоремы синусов плоской тригонометрии для треугольников ABJ и AJC (рис. 28, *а*, *б*) получаем равенства

$$\frac{AB}{\sin\beta}=\frac{AJ}{\sin\gamma}=\frac{BJ}{\sin(\beta+\gamma)}, \tag{6.10}$$

$$\frac{AJ}{\sin\delta}=\frac{AC}{\sin\beta}=\frac{JC}{\sin(\beta-\delta)}. \tag{6.11}$$

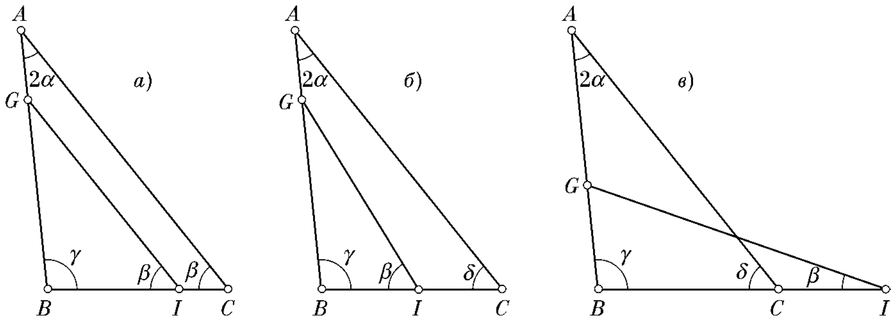


Рис. 27

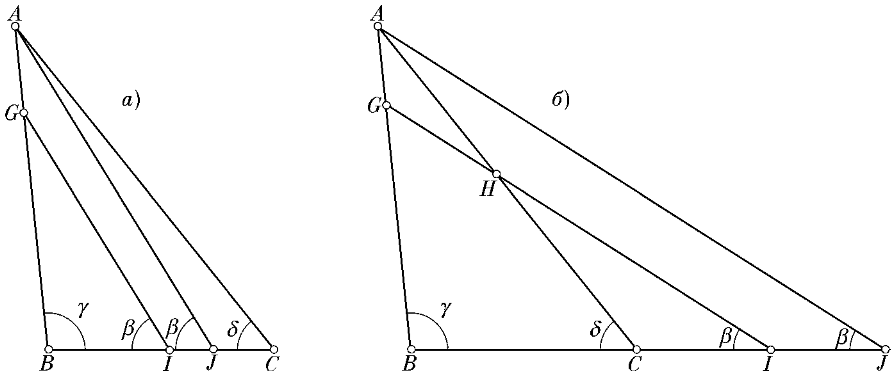


Рис. 28

Поэтому формула (6.5) равносильна формуле

$$\frac{2a}{2p}=\frac{\sin\gamma\,\sin\delta}{\sin(\beta+\gamma)\,\sin(\beta-\delta)}. \tag{6.12}$$

Сопряженные диаметры и центры конических сечений

В предложении I_{15} Аполлоний доказывает, что прямая линия, проходящая через середину диаметра эллипса в направлении ординат, проведенных к этому диаметру, является диаметром эллипса, сопряженным с этим диаметром. Отсюда следует, что понятие сопряженных диаметров является взаимным.

В предложении I_{16} Аполлоний доказывает, что прямая линия, проходящая через середину поперечного диаметра двух противоположных гипербол в направлении ординат, проведенных к этому диаметру, является восставленным диаметром этих гипербол, сопряженным с первым диаметром.

После предложения I_{16} Аполлоний приводит «Вторые определения». В первом из этих определений Аполлоний называет середину поперечной стороны конического сечения центром этого сечения и тем самым распространяет на конические сечения понятие центра круга. Здесь же Аполлоний называет отрезок поперечной стороны между центром и вершиной конического сечения тем же термином, которым Евклид называл радиус круга. В другом предложении Аполлоний доказывает, что в каждом коническом сечении, обладающем центрами, все центры совпадают, и такое коническое сечение обладает единственным центром.

Далее Аполлоний вводит термин «второй диаметр» конического сечения, которым он называет отрезок диаметра, сопряженного

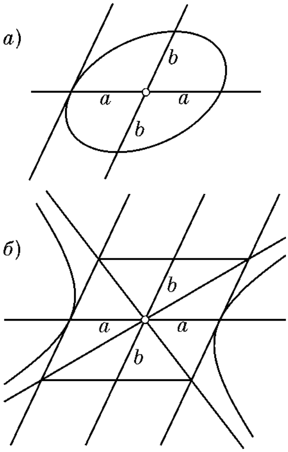


Рис. 29

с диаметром, содержащим поперечную сторону, и равный средней пропорциональной величине между прямой и поперечной сторонами конического сечения. Если поперечная сторона конического сечения равна $2a$, а прямая сторона — $2p$, то средняя пропорциональная величина между линиями $2a$ и $2p$, которую мы будем обозначать $2b$, определяется пропорцией

$$2a:2b=2b:2p, \tag{6.13}$$

равносильной соотношению

$$p=\frac{b^2}{a}. \tag{6.14}$$

Если в случае эллипса (5.5) и пары противоположных гипербол (5.6) перенести начало координат из вершины конического сечения в его центр, то для эллипса (рис. 29, *а*) это преобразование координат состоит в замене абсциссы x суммой $x+a$. Произведя эту замену в уравнении (5.5), мы получим уравнение

$$y^2=2px+2pa-\frac{p}{a}x^2-2px-pa,$$

т. е.

$$y^2=pa-\frac{p}{a}x^2. \tag{6.15}$$

В силу соотношения (6.14) $p/a=b^2/a^2$. Разделив обе части уравнения (6.15) на b^2, мы получим уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{6.16}$$

Для пары противоположных гипербол (рис. 29, *б*) преобразование, при котором начало координат переходит из вершины одной из гипербол в центр, состоит в замене абсциссы x разностью $x-a$. Произведя эту замену в уравнении (5.6), мы получим уравнение

$$y^2=2px-2pa+\frac{p}{a}x^2-2px+pa,$$

т. е.

$$y^2=\frac{p}{a}x^2+pa. \tag{6.17}$$

В силу соотношения (6.14) здесь также $p/a = b^2/a^2$. Разделив обе части уравнения на b^2, мы получим уравнение пары противоположных гипербол в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (6.18)$$

Осями координат в случае уравнений (6.17) и (6.18) являются два сопряженных диавметра эллипса или гиперболы.

Уравнения (6.16) и (6.18) называются центральными уравнениями эллипса и пары противоположных гипербол. Осями координат в случае этих уравнений являются два сопряженных диаметра эллипса или противоположных гипербол.

В предложениях I_{41}—I_{45} Аполлоний доказывает теоремы о равенстве площадей, многие из этих равенств равносильны уравнениям (6.16) и (6.18) эллипсов и пар противоположных гипербол.

Эйдосы эллипсов и гипербол

В конце «Вторых определений» Аполлоний вводит понятия «эйдоса (*eidos*) эллипса или гиперболы». Этим словом Аполлоний называет прямоугольник, стороны которого равны прямой стороне $2p$ и поперечной стороне $2a$ конического сечения. В силу формулы (1.14) площадь этого прямоугольника равна $2a \cdot 2p = 4b^2$.

В переводах «Конических сечений» слово «*eidos*» часто передают словом «фигура». Кроме геометрического смысла, означающего фигуру и форму, который сохранился в термине Евклида «ромбоид» для параллелограмма, не являющегося ромбом, и в терминах Архимеда «коноид» и «сфероид», «*eidos*» имеет также философский смысл. В сочинениях Платона этот термин, часто переводимый словом «идея», означает то, что при взаимодействии с «пространством» образует устойчивое явление; применительно к живым существам «*eidos*» Платона равносилен понятию души. Этому понятию аналогичны «энтелехия» Аристотеля и «абсолютная идея» Гегеля. Возможно, что Аполлоний вкладывал в понятие «*eidos*» некий философский смысл.

Симметрии конических сечений

В предложении I_{30} доказывается, что коническое сечение не может иметь более одного центра. Центр эллипса и пары противоположных гипербол обладает тем свойством, что все диаметры эллипса и все поперечные диаметры гипербол делятся в нем пополам. Поэтому центр эллипса и пары противоположных гипербол является центром симметрии этих конических сечений, т. е. эти конические сечения переходят в себя при отражении относительно центра.

В системах координат, в которых эллипсы и гиперболы определяются уравнениями (6.16) и (6.18), центры этих конических сечений совпадают с началом координат, и отражение от центра имеет вид

$$x'=-x, \qquad y'=-y. \tag{6.19}$$

Отражение (6.19) является произведением преобразований

$$x'=x, \qquad y'=-y, \tag{6.20}$$

$$x'=-x, \qquad y'=y. \tag{6.21}$$

В том случае, когда система координат прямоугольная, преобразование (6.20) является отражением относительно оси Ox, а преобразование (6.21) — относительно оси Oy.

Ось Ox является осью симметрии параболы (5.4), эллипсов (5.5) и (6.16) и гипербол (5.6) и (6.18).

Ось Oy является осью симметрии эллипса (6.16) и пары противоположных гипербол (6.18).

Отражение относительно точек, приводимое к виду (6.19), и отражение относительно прямых, приводимое к виду (6.20) и (6.21), являются единственными инволютивными движениями евклидовой плоскости, т. е. такими движениями, произведения которых на себя являются тождественными преобразованиями. Поэтому точки и прямые линии евклидовой плоскости являются образами симметрии этой плоскости.

С каждой параболой связан единственный образ симметрии евклидовой плоскости — ее ось, с каждым эллипсом и парой противоположных гипербол связано три образа симметрии этой плоскости — центр и две взаимно перпендикулярные оси.

Касательные к коническим сечениям

При выводе уравнений (5.4), (5.5) и (5.6) Аполлоний рассматривал только ось абсцисс конического сечения — один из диаметров этого сечения, абсциссы точек конического сечения — отрезки, отсекаемые на диаметре от вершины сечения, и ординаты этих точек — половины хорд сечения, которые диаметр делит пополам. При выводе этих уравнений Аполлоний не рассматривал оси ординат — касательной к коническому сечению в его вершине.

Эта касательная появляется только в предложении I_{17}. «Если в коническом сечении провести из вершины этой линии прямую, параллельную одной из ординат, она попадет во внешнюю область сечения» [25, т. 1, с. 258]. Теорема доказывается от противного: предполагается, что прямая, проведенная из вершины A конического сечения параллельно ординатам, находится во внутренней области этого сечения. Тогда эта прямая пересечет коническое сечение в некоторой точке C. Но ордината точки C соединяет эту точку с некоторой точкой диаметра, находящейся во внутренней области сечения, и не может пройти через вершину A. Аполлоний заканчивает доказательство этого предложения словами о прямой, проведенной из вершины A параллельно ординатам: «Она попадет во внешнюю область и, следовательно, будет касательной к сечению» [25, т. 1, с. 258].

Здесь Аполлоний распространил на конические сечения определение касательной к окружности, данное Евклидом в предложении III_{16} «Начал».

Аполлоний также распространил на конические сечения понятия внешних и внутренних точек и областей окружности. Под внешней точкой конического сечения он имел в виду такую точку, из которой можно провести касательную к сечению, а под внутренней точкой — такую точку, из которой касательную к коническому сечению провести нельзя.

В современной геометрии касательная к кривой определяется как предельное положение секущей при стремлении одной из двух точек ее пересечения с кривой к другой из этих точек. Определение Аполлония, по существу, совпадает с этим определением, так как при стремлении прямой, проведенной в направлении ординат конического сечения, к его вершине, эта прямая пересекается с сечением в двух точках, находящихся по разные стороны диаметра, и эти точки сливаются в вершине сечения.

Аполлоний снова рассматривает касательную к коническому сечению в предложении I_{32}: «Если через вершину конического сечения провести прямую, параллельную одной из ординат, она будет касательной к сечению, и никакая другая прямая не попадет между коническим сечением и этой прямой» [25, т. 1, с. 282—284].

Свойства диаметров конических сечений

В предложениях II_5—II_7 и II_{26}—II_{43} доказываются теоремы о свойствах диаметров конических сечений.

В предложениях II_5 и II_6 доказывается, что если диаметр конического сечения делит пополам его хорду, то касательная к сечению в конце диаметра параллельна этой хорде.

В предложении II_7 доказывается, что если прямая линия делит пополам хорду конического сечения и касательная в точке пересечения ее с коническим сечением параллельна этой хорде, то эта линия является диаметром сечения.

Из предложений II_{26}—II_{43} отметим следующие предложения.

В предложениях II_{27}—II_{31} доказывается, что касательные к эллипсу в двух концах его диаметра и касательные к двум противоположным гиперболам в двух концах их поперечного диаметра параллельны.

В предложениях II_{28} и II_{36} доказывается, что прямая линия, соединяющая середины двух параллельных хорд конического сечения, является диаметром этого конического сечения.

В предложении II_{37} доказывается, что два диаметра пары противоположных гипербол, из которых один поперечный, а другой восставленный, соединяющий центр с серединой прямолинейного отрезка, параллельного первому диаметру и находящегося между обеими гиперболами, являются сопряженными диаметрами.

Аналогичное предложение о том, что два диаметра эллипса, из которых второй соединяет центр эллипса с серединой хорды, параллельной первому диаметру, являются сопряженными диаметрами, Аполлоний, по-видимому, считает совпадающим с предложением I_{15}.

Пары произвольных диаметров

В предложениях I_{18}—I_{32} Аполлоний доказывает различные теоремы о взаимном расположении конических сечений и прямых линий; в частности, в предложении I_{26} он доказывает, что прямые, параллельные оси параболы, пересекают ее в одной точке.

Отметим предложения I_{23} и I_{25}, в первом из которых рассматривается эллипс, в котором проведены два произвольных диаметра, и доказывается, что прямая, соединяющая две точки дуги эллипса, находящейся между концами диаметра, при продолжении пересечется с продолжениями диаметров вне эллипса. Во втором из этих предложений рассматривается тот же эллипс и аналогичное утверждение о касательной к эллипсу в одной из точек дуги, находящейся между концами диаметра.

В доказательстве этих предложений Аполлоний предполагает, что диаметры сопряженные, но обе теоремы верны для любых двух диаметров. Возможно, применение сопряженных диаметров является следствием того, что в аналогичной теореме предшественников Аполлония говорилось о «двух диаметрах» — о двух осях эллипса.

Уравнение конического сечения в системе координат, осями которой являются два произвольных диаметра этого сечения, имеет вид

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+F=0. \tag{6.22}$$

В наиболее общей системе координат уравнение конического сечения имеет вид

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0. \tag{6.23}$$

Уравнения (6.22) и (6.23) кроме конического сечения могут определять также пару вещественных или мнимо сопряженных пересекающихся прямых, а в том случае, когда этим уравнениям не удовлетворяет ни одна точка плоскости, их называют уравнениями мнимых конических сечений; уравнение (6.23) может определять также пару вещественных или мнимо сопряженных параллельных прямых, а также пару совпадающих прямых.

Преобразования координат

В предложениях I_{46}—I_{51} Аполлоний рассматривает преобразования координат, сохраняющие вид уравнений конических сечений.

В предложении I_{46} доказывается, что всякая прямая, параллельная оси параболы, является ее диаметром.

В предложении I_{47} доказывается, что всякая прямая, проходящая через центр эллипса или гиперболы, является диаметром этого конического сечения.

Далее Аполлоний показывает, что уравнения (5.4), (5.5) и (5.6) парабол, эллипсов и гипербол получаются всегда, когда за ось абсцисс принимается произвольный диаметр конического сечения, а за ось ординат — касательная к сечению в конце этого диаметра.

В общем случае эта система координат косоугольная, система координат является прямоугольной в том случае, когда за ось абсцисс принимается ось конического сечения.

Прямой круговой конус

В прямом круговом конусе (рис. 30, *а*—*в*) $\gamma=\delta=90^\circ-\alpha$, и формула (6.9) принимает вид

$$\frac{p}{r}=\frac{2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=2\sin^2\alpha, \tag{6.24}$$

а формула (6.12) принимает вид

$$\frac{a}{p}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin(90^\circ-\alpha+\beta)\sin(90^\circ-\alpha-\beta)}. \tag{6.25}$$

В случае парабол, с помощью которых Менехм решал задачу об удвоении куба, $\alpha=45^\circ$ и $p/r=2\sin^2 45^\circ=1$, т. е. $p=r$.

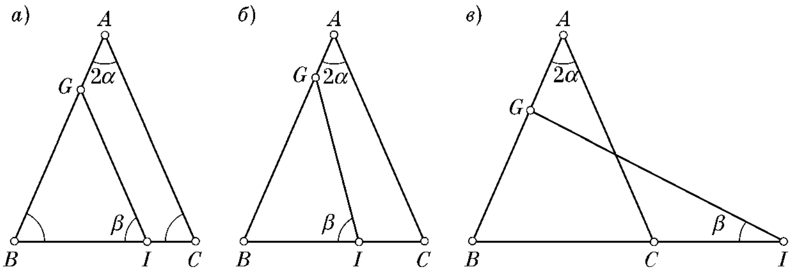


Рис. 30

В случае эллипса $\beta<\gamma$, т. е. $\alpha+\beta<90^\circ$, и формула (6.22) равносильна формуле

$$\frac{p}{a}=\frac{\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)}{\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\cos^2\alpha}=$$
$$=\cos^2\beta-\mathrm{tg}^2\,\alpha\sin^2\beta.$$

В силу формулы (5.10)

$$e^2=1-\frac{p}{a}=\sin^2\beta(1+\mathrm{tg}^2\,\alpha)=\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\alpha},$$

откуда находим

$$e=\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}. \qquad (6.26)$$

В случае гиперболы $\gamma<\beta$, т. е. $\alpha+\beta>90^\circ$, и формула (6.25) равносильна формуле

$$\frac{p}{a}=\frac{-\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta-\cos^2\alpha\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}=$$
$$=\mathrm{tg}^2\,\alpha\sin^2\beta-\cos^2\beta.$$

В силу формулы (5.11)

$$e^2=\frac{p}{a}+1=(\mathrm{tg}^2\,\alpha+1)\sin^2\beta=\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\alpha},$$

откуда находим, что в случае гиперболы также имеет место формула (6.26).

Формула (6.26) верна также в случае параболы, когда $\beta=\delta=$ $=90^\circ-\alpha$ и $\sin\beta=\cos\alpha$.

В случае конических сечений, которые рассматривались предшественниками Аполлония и высекались из поверхности прямого кругового конуса плоскостью, перпендикулярной одной из прямолинейных образующих конуса, эксцентриситет конического сечения зависит только от угла α. В этом случае $\beta=\alpha$, и формула (6.26) принимает вид

$$e=\mathrm{tg}\,\alpha. \qquad (6.27)$$

В случае окружности роль прямого кругового конуса играет прямой круговой цилиндр, и $\alpha=0$. В случае эллипса $0<\alpha<45^\circ$, в случае параболы $\alpha=45^\circ$, в случае гиперболы $\alpha>45^\circ$.

Прямые стороны как удвоенные координаты некоторых точек конических сечений

Найдем точки конических сечений (5.4), (6.16) и (6.18), ординаты которых равны p, т. е. половине прямой стороны конического сечения.

Для параболы (5.4) такой точкой является точка с абсциссой $x=$ $=p/2$, так как $y^2=2p\cdot p/2=p^2$.

Для эллипса (6.16) такими точками являются точки, абсциссы x которых равны $\pm\sqrt{a^2-b^2}$, так как соотношение $\frac{a^2-b^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ равносильно соотношению $y^2=b^4/a^2=p^2$.

Для гиперболы (6.18) такими точками являются точки, абсциссы x которых равны $\pm\sqrt{a^2+b^2}$, так как соотношение $\frac{a^2+b^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ равносильно соотношению $y^2=b^4/a^2=p^2$.

Асимптоты гиперболы

Аполлоний определяет асимптоты гиперболы в предложении II_1: «Если прямая является касательной к гиперболе в ее вершине и если на этой прямой по обе стороны от диаметра отложены отрезки, квадраты которых равны четверти эйдоса, то прямые, которые проведены из центра сечения к концам определенных таким образом отрезков касательной, не встретят сечение» (рис. 31) [25, т. 2, с. 2].

Поскольку площадь эйдоса равна $2a\cdot 2p=4b^2$, отрезки BD и BE, откладываемые на касательной к гиперболе в ее точке B, равны b. Каждую из прямых CD и CE, соединяющих центр C гиперболы с точками D и E, Аполлоний называет «асимптотой» (*asymptota* — «несовпадающая»; это слово — того же корня, что и *symptoma*). Таким образом Аполлоний определяет асимптоты как диагонали параллелограмма, одна из сторон которого равна и параллельна диаметру $AB=2a$ гиперболы, а другая — линия $DE=2b$.

Аполлоний доказывает эту теорему от противного, предполагая, что асимптота CD имеет общую точку H с гиперболой. Из точки H он проводит ординату HO гиперболы, тогда CO является абсциссой x точки H. Если H — точка асимптоты, то ее ордината OH равна $\frac{b}{a}x$, если же H — точка гиперболы, то ее ордината y удовлетворяет уравнению (6.18) и квадрат ординаты y^2 равен

$$b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)=\left(\frac{b}{a}x\right)^2-b^2,$$

и ордината y точки гиперболы меньше, чем $\frac{b}{a}x$.

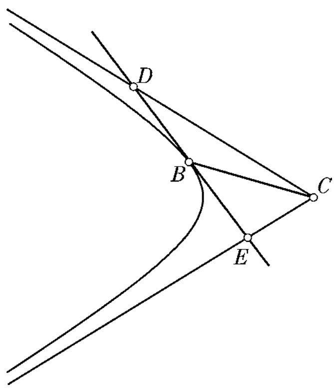


Рис. 31

Из этого предложения следует, что асимптоты гиперболы (6.18) определяются уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0. \tag{6.28}$$

В предложении II_2 доказывается, что каждый диаметр гиперболы, проходящий внутри угла DCE, пересекается с гиперболой и поэтому не может быть асимптотой.

В предложении II_3 доказывается, что касательная к гиперболе в любой ее точке пересекается с обеими ее асимптотами, и отрезок касательной между асимптотами делится в точке касания пополам.

Предложение II_4 является задачей о построении гиперболы с данными асимптотами CD и CE, проходящей через данную точку, находящуюся внутри угла DCE.

Из предложений II_8—II_{16}, в которых рассматриваются асимптоты гипербол, отметим следующие предложения.

Предложение II_{12} «Конических сечений» гласит: «Если из точки сечения проведены две прямые к асимптотам, и если из некоторой точки этого сечения проведены параллели к этим прямым, то прямоугольник под параллелями будет равен прямоугольнику под прямыми, которым они параллельны» [25, т. 2, с. 22].

В случае, когда проведенные прямые параллельны самим асимптотам гиперболы, это предложение равносильно уравнению гиперболы

$$xy=\mathrm{const} \tag{6.29}$$

в системе координат, осями которой являются асимптоты.

Уравнение (6.29) является частным случаем уравнения (6.22).

В предложении II_{13} доказывается, что прямая линия, параллельная одной из асимптот гиперболы, пересекает ее в одной точке. Направление асимптоты гиперболы современные математики называют «асимптотическим направлением гиперболы». В предложении I_{26} говорится, что аналогичным свойством обладают прямые, проведенные в направлении оси параболы, которое называют «асимптотическим направлением параболы».

В предложении II_{14} Аполлоний доказывает, что асимптоты гиперболы и сама эта гипербола, продолженная неопределенно, приближаются друг к другу, и расстояние между ними при их продолжении становится меньше любого заданного расстояния.

К формулировке этого предложения весьма близки определения Карла Вейерштрасса (1815—1897) предела последовательности и непрерывности функций: число a является пределом последовательности a_n, если для всякого $\varepsilon>0$ существует такое число N, что для всех $n>N$ выполняется неравенство $|a-a_n|<\varepsilon$; функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=x_0$, если для всякого $\varepsilon>0$ существует такая величина $\eta>0$, что если $|x-x_0|<\eta$, выполняется неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Возможно, что эти определения Вейерштрасса возникли под влиянием рассматриваемого предложения Аполлония.

В предложении II_{15} доказывается, что две противоположные гиперболы имеют одни и те же асимптоты. Это утверждение следует из того, что противоположные гиперболы определяются одними и теми же уравнениями.

В предложениях II_5-II_7 доказывается, что если диаметр конического сечения делит пополам его хорды, то касательная в конце диаметра параллельна этим хордам, а также обратные утверждения.

Геометрические места к трем и четырем прямым

В предисловии к I книге «Конических сечений» Аполлоний упоминает «геометрические места точек к трем и четырем прямым».

Пусть на плоскости даны три или четыре прямые с уравнениями

$$a_i x + b_i y = c_i \qquad (i=1, 2, 3, 4). \tag{6.30}$$

Если эти уравнения нормированы условиями $a_i^2+b_i^2=1$, то величины $d_i=a_i x+b_i y-c_i$ равны расстояниям от точки M с координатами x, y до прямых (6.30). Геометрическое место точек к четырем прямым определяется условием

$$d_1 d_3 = k d_2 d_4, \tag{6.31}$$

а геометрическое место к трем прямым определяется условием

$$d_1 d_3 = k d_2^2. \tag{6.32}$$

Если мы подставим в формулы (6.31) и (6.32) выражения d_i, мы получим частный случай уравнения (6.23). Поэтому геометрические места к трем и четырем прямым представляют собой кривые второго порядка, т. е. в общем случае конические сечения. Во введении к I книге «Конических сечений» Аполлоний писал, что эту задачу исследовал еще Евклид, но предложенное им решение было неполным, и его нельзя было довести до конца без новых открытий Аполлония, изложенных в III книге «Конических сечений».

Г. Цейтен [59, с. 126—149] доказал, что из предложений $\text{III}_{53}-\text{III}_{56}$, содержащих построение конического сечения с помощью проективного соответствия двух пучков прямых, можно вывести, что искомое геометрическое место является коническим сечением, и любое коническое сечение есть геометрическое место к трем или четырем прямым. Приведенное нами решение этой задачи было получено Рене Декартом (1596—1650) как первый пример применения его аналитической геометрии.

Связь между пересечением прямых и парами точек конических сечений

В предложениях II_{24} и II_{25} Аполлоний устанавливает связь между пересекающимися прямыми и парами точек конических сечений, общих с этими прямыми. Аполлоний доказывает, что если прямые AB и CD пересекаются с коническим сечением в точках A, B, C, D и если точка пересечения прямых AB и CD — внутренняя точка конического сечения, то пары точек A, B и C, D конического сечения разделяют друг друга, а если точка пересечения прямых — внешняя точка конического сечения, то пары точек A, B и C, D не разделяют друг друга. Аполлоний формулирует это утверждение только для параболы и гиперболы и не формулирует его для эллипса, для которого это условие также имеет место, по-видимому, по той причине, что выполнение этого правила для окружности общеизвестно, а правило для эллипса легко получить из правила для окружности сжатием окружности к ее диаметру.

Нахождение диаметров, центров и осей конических сечений

В предложении II_{44} Аполлоний находит диаметры конических сечений. В силу предложения II_7 диаметр конического сечения находится как прямая линия, соединяющая середины двух параллельных хорд сечения.

В предложении II_{45} находится центр эллипса или гиперболы как точка пересечения двух диаметров этих конических сечений.

В предложении II_{46} определяется ось параболы. Если найденный диаметр параболы не является ее осью, то проводится хорда параболы, перпендикулярная найденному диаметру, и осью параболы является прямая линия, проведенная через центр этой хорды параллельно ее диаметру.

В предложении II_{47} находятся оси эллипса и гиперболы. Если найденный диаметр не является осью, то из центра конического сечения проводится дуга окружности, пересекающая сечение в двух точках, проводится хорда, соединяющая эти точки. Одна из осей — прямая линия, проходящая через центр сечения и середину проведенной хорды, вторая ось — прямая линия, проходящая через центр сечения и параллельная проведенной хорде.

Уравнение (6.23) можно переписать в векторной форме

$$\vec{x}\Phi\vec{x}+2\vec{V}\vec{x}+F=0, \tag{6.33}$$

где Φ — линейный оператор с матрицей $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$, $\vec{V}$ — вектор с координатами D и E. Оси конического сечения (6.33) направлены по собственным векторам оператора Φ. Поэтому предложение II_{47} является первой в истории математики задачей, равносильной нахождению собственных векторов линейного оператора.

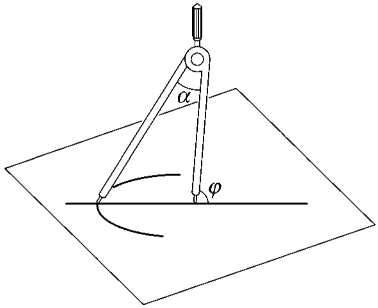


Рис. 32

Совершенный циркуль

Определение Аполлония конических сечений как сечений кругового конуса плоскостями под произвольными углами было использовано персидским математиком X в. Абу Сахлем ал-Кухи при создании инструмента для вычерчивания конических сечений. Этот инструмент, названный ал-Кухи «совершенным циркулем» (см. [11]), представлял собой циркуль, неподвижная ножка которого могла быть наклонена к плоскости бумаги под произвольным углом φ, а подвижная ножка, составляющая с неподвижной ножкой произвольный острый угол α, могла менять свою длину так, чтобы карандаш на конце этой ножки все время касался бумаги (рис. 32). Подвижная ножка циркуля при ее вращении вокруг неподвижной ножки описывает поверхность прямого кругового конуса, пересекаемого плоскостью бумаги, и карандаш на конце этой ножки при ее вращении описывает коническое сечение, являющееся пересечением плоскости бумаги с конической поверхностью.

Так как угол φ является дополнением угла β до прямого угла, из соотношения (6.23) вытекает, что эксцентриситет e конического сечения, начерченного совершенным циркулем, равен

$$e = \frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}. \tag{6.34}$$

Арабские названия конических сечений являются переводами греческих названий: в арабских трактатах парабола называется *кат^c мукафи* — «достаточное сечение», эллипс — *кат^c накис* — «недостаточное сечение», «гипербола» — *кат^c заид* — «избыточное сечение». В арабских трактатах прямая сторона конического сечения называлась *дил^c каим*, а поперечная сторона — *дил^c маил*. Эти выражения являются переводами греческих терминов, соответственно, *orthia pleura* и *plagia pleura*. Последний термин означает и «поперечная сторона», и «наклонная сторона». Аполлоний понимал этот термин в его первом значении, но арабы перевели его во втором значении.

Глава 7

АФФИННАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Аффинные преобразования

С каждым диаметром конического сечения связано инволютивное преобразование (6.20) в той системе координат, осью Ox которой является этот диаметр, а осью Oy — сопряженный с ним диаметр. В том случае, когда диаметр конического сечения не является его осью, эта система координат — косоугольная, и преобразование (6.20) не является движением плоскости. В этом случае преобразование (6.20) является аффинным преобразованием плоскости.

Аффинными преобразованиями плоскости называются взаимно однозначные преобразования плоскости, переводящие прямые в прямые. Так как такие преобразования не могут перевести параллельные прямые в пересекающиеся, аффинные преобразования переводят параллельные прямые в параллельные. Поэтому аффинные преобразования переводят параллелограммы в параллелограммы, и ориентированные отрезки, представляемые одним и тем же вектором, — в такие же отрезки, а значит, аффинные преобразования переводят векторы в векторы. При этом сумма векторов переводится в сумму соответствующих векторов, а произведение вектора на вещественное число — в произведение соответствующего вектора на то же число.

Если точки M, N, P лежат на одной прямой, то векторы $\vec{a}=\overrightarrow{MN}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{MP}$ коллинеарны, и вектор $\vec{b}$ равен произведению вектора $\vec{a}$ на число

$$V(M, N; P)=MP/MN, \tag{7.1}$$

называемое простым отношением точек M, N, P. Из указанных свойств аффинных преобразований векторов следует, что при аффинных преобразованиях плоскости сохраняются простые отношения троек точек, лежащих на одной прямой.

Если на плоскости заданы два неколлинеарных вектора $\vec{i}$ и $\vec{j}$, всякий вектор $\overrightarrow{OM}$ может быть представлен в виде линейной комбинации $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$. Числа x и y называются аффинными координатами точки M в системе координат с началом O и осями Ox и Oy, направленными по векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

Аффинные преобразования записываются в аффинных координатах следующим образом:

$$x'=Ax+By+C, \qquad y'=Dx+Ey+F. \tag{7.2}$$

Важнейшими видами аффинных преобразований являются преобразования

$$x'=x, \qquad y'=Ey; \tag{7.3}$$

$$x'=Ax, \qquad y'=Ay; \tag{7.4}$$

$$x'=x+C, \qquad y'=y; \tag{7.5}$$

$$x'=x+By, \qquad y'=y. \tag{7.6}$$

Преобразование (7.3) при $E<1$ называется сжатием к оси Ox, при $E>1$ — растяжением от оси Ox, в случае прямоугольных координат эти преобразования называются прямыми сжатием и растяжением, в случае косоугольных координат — косыми сжатием и растяжением. Преобразование (7.4) называется гомотетией, оно переводит каждую фигуру в подобную ей фигуру. При $A<1$ гомотетия называется сжатием к точке O, при $A>1$ она называется растяжением от точки O, при $A=-1$ она называется отражением относительно точки O.

Преобразование (7.5) является движением, называемым параллельным переносом вдоль оси Ox.

Преобразование (7.6) называется сдвигом вдоль оси Ox. Сдвиг применяется для геометрической интерпретации перехода от одной инерциальной системы к другой при движении вдоль прямой со скоростью v в классической механике Галилея—Ньютона

$$x'=x-vt, \qquad t'=t.$$

При преобразованиях (7.3) и (7.6) все точки оси Ox остаются неподвижными, преобразование (7.4) обладает единственной неподвижной точкой O, преобразование (7.5) не имеет неподвижных точек.

Преобразование (7.2) при $C=F=O$ называется аффинным вращением вокруг точки O.

При аффинных преобразованиях (7.2) площади плоских фигур умножаются на абсолютную величину определителя $\begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix}$. В случае, когда эта абсолютная величина равна 1, аффинные преобразования (7.2) называются эквиаффинными преобразованиями. При этих преобразованиях сохраняются площади плоских фигур.

Эквиаффинные преобразования рассматривались Сабитом ибн Коррой в трактате о сечениях цилиндра. Аффинные преобразования общего вида рассматривались его внуком Ибрахимом ибн Синаном в трактате о площади сегмента параболы. Алексис Клод Клеро (1713—1765) называл фигуры, одна из которых получена из другой аффинным преобразованием, «фигурами одного и того же вида», а Леонард

Эйлер (1707—1783) ввел для таких фигур термин «аффинные фигуры». Более подробно об аффинной геометрии и ее истории см. [16, с. 111—130; 18, с. 126—128, 138—142].

Аффинные образы симметрии

Аффинные преобразования (7.2) являются инволютивными в том случае, когда их можно привести к виду (7.4) при $A=-1$, или к виду (7.3) при $E=-1$, т. е. к виду (6.19) или (6.20). Преобразование (6.19) является движением и называется отражением относительно точки O. Преобразование (6.20) в случае прямоугольных координат является движением, называемым отражением относительно оси Ox, а в случае косоугольных координат называется аффинным отражением относительно оси Ox.

Поэтому аффинными образами симметрии на плоскости являются точки и «нормализованные прямые линии», для которых, если считать их осями Ox, указано направление оси Oy.

Параболические, эллиптические и гиперболические повороты

Произведение отражений относительно двух диаметров круга является поворотом вокруг центра круга на угол, равный удвоенному углу между диаметрами. Поэтому будем называть произведение отражений относительно двух диаметров параболы параболическим поворотом, произведение отражений относительно двух диаметров эллипса — эллиптическим поворотом, а произведение отражений относительно двух диаметров гиперболы — гиперболическим поворотом.

Если косое отражение от прямой AB переводит точку C в точку D, то треугольники ABC и ABD имеют одно и то же основание AB и равные высоты, поэтому площади этих треугольников равны. Отсюда видно, что косые отражения от прямых, как и прямые отражения, являются эквиаффинными преобразованиями. Поэтому параболические, эллиптические и гиперболические повороты, являющиеся произведениями отражений относительно двух прямых, также являются эквиаффинными преобразованиями.

Параболический поворот, как и отражения относительно диаметров параболы, переводит в себя параболу. Аналогично, эллиптический поворот переводит в себя эллипс, а гиперболический поворот — гиперболу.

Параболический поворот, переводящий ось $y=0$ параболы (5.4) в диаметр $y=h$ той же параболы, имеет вид:

$$x'=x+\frac{h}{p}y+\frac{h^2}{2p}, \qquad y'=y+h. \tag{7.7}$$

Параболический поворот (7.7) является произведением сдвига (7.6) при $B=h/p$ и параллельного переноса $x'=x+h^2/2p$, $y'=y+h$.

Эллиптический поворот, переводящий в себя эллипс (5.5), имеет вид:

$$x'=x\cos\varphi+\frac{a}{b}y\sin\varphi,\qquad y'=-\frac{b}{a}x\sin\varphi+y\cos\varphi. \tag{7.8}$$

Гиперболический поворот, переводящий в себя гиперболу (5.6), имеет вид:

$$x'=x\operatorname{ch}\varphi+\frac{a}{b}y\operatorname{sh}\varphi,\qquad y'=\frac{b}{a}x\operatorname{sh}\varphi+y\operatorname{ch}\varphi. \tag{7.9}$$

Гиперболический поворот

$$x'=x\operatorname{ch}\psi+t\operatorname{sh}\psi,\qquad t'=x\operatorname{sh}\psi+t\operatorname{ch}\psi$$

применяется для геометрической интерпретации перехода от одной инерциальной системы к другой при движении вдоль прямой в специальной теории относительности Эйнштейна в плоскости с координатами x и t. Аргумент ψ связан со скоростью v второй инерциальной системы относительно первой и со скоростью c света соотношением

$$\operatorname{th}\psi=v/c.$$

Если преобразования (7.7), (7.8) и (7.9) записаны в виде (7.2), определители $AE-BD$ этих преобразований, соответственно, равны $1\cdot 1-h/p\cdot 0=1$, $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$, $\operatorname{ch}^2\varphi-\operatorname{sh}^2\varphi=1$, и мы снова получаем, что эти преобразования эквиаффинные.

Поскольку аффинные преобразования переводят параллельные прямые в параллельные прямые и сохраняют простые отношения троек точек на прямых, преобразования (7.7), (7.8) и (7.9) переводят диаметры конических сечений в диаметры, а ординаты, проведенные к диаметрам — в такие же ординаты. Поэтому эллиптические и гиперболические повороты оставляют неподвижными центры эллипсов и гипербол и переводят сопряженные диаметры этих конических сечений в сопряженные диаметры.

Гиперболические повороты, переводящие в себя одну гиперболу, переводят в себя противоположную гиперболу. Асимптоты гипербол можно определить как диаметры, которые сопряжены сами с собой, поэтому гиперболические повороты переводят асимптоты гипербол в себя.

При гиперболическом повороте (7.9) векторы, направленные по одной из асимптот этой гиперболы, умножаются на число $\operatorname{ch}\varphi+\operatorname{sh}\varphi=e^{\varphi}$, а векторы, направленные по другой асмптоте, умножаются на число $\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{sh}\varphi=1/e^{\varphi}$.

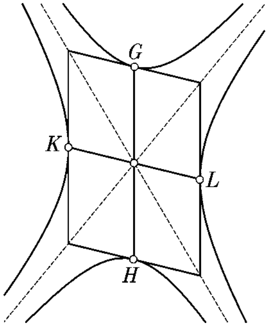


Рис. 33

Сопряженные пары противоположных гипербол

В предложении II_{17} Аполлоний впервые рассматривает «сопряженные противоположные гиперболы» (рис. 33). Он не дает их определения, но из приводимых свойств ясно, что противоположные гиперболы, сопряженные с гиперболами (5.6), определяются уравнением

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1. \qquad (7.10)$$

В этом предложении Аполлоний доказывает, что поперечные диаметры одной из пар сопряженных гипербол (5.6) и (7.10) являются восставленными диаметрами другой пары и что центры и асимптоты гипербол обеих пар совпадают.

Аполлоний доказывает для сопряженных диаметров двух сопряженных пар противоположных гипербол ряд теорем, аналогичных теоремам о сопряженных диаметрах эллипса.

Гиперболический поворот, переводящий в себя пару противоположных гипербол, переводит в себя также пару противоположных гипербол, сопряженную с первой парой.

Применение параболических, эллиптических и гиперболических поворотов

Аполлоний нигде не упоминает параболических, эллиптических и гиперболических поворотов, однако многие предложения «Конических сечений» чрезвычайно легко доказываются с помощью этих поворотов. Поэтому весьма вероятно, что Аполлоний пользовался такими поворотами для получения результатов этих предложений, но позже он находил для этих предложений доказательства с помощью методов, обычно применявшихся античными математиками.

Наиболее ярким примером такого предложения является упоминавшееся нами предложение II_3, утверждение которого может быть получено из определения асимптот гиперболы, данного в предложении II_1, с помощью гиперболического поворота, переводящего в себя эту гиперболу.

Многие из предложений III_1—III_{15}, в которых доказываются теоремы о равенстве площадей плоских фигур, могут быть доказаны с помощью параболических, эллиптических и гиперболических поворотов. Например, в предложении III_1 рассматривается коническое сечение AB, проводятся касательные AEC и BED и диаметры AD и BC и доказывается равенство площадей треугольников ADE и EBC.

Это равенство очевидно в случае, когда треугольники симметричны относительно оси конического сечения. Для параболы, диаметры AD и BC которой параллельны, общий случай этого равенства может быть получен из упомянутого параболическим поворотом. Для гиперболы и эллипса, диаметры AD и BC которых пересекаются в их центрах, общий случай может быть получен из упомянутого гиперболическим или эллиптическим поворотом вокруг центра.

Многие из предложений VII_6—VII_{31}, в которых доказываются теоремы о сопряженных диаметрах конических сечений, могут быть доказаны с помощью эллиптических и гиперболических поворотов. Отметим следующие из этих предложений.

В предложении VII_{12} доказывается: «Во всяком эллипсе сумма квадратов любых двух сопряженных диаметров равна сумме квадратов осей» [26, с. 412—413]. Обозначим большую и малую оси эллипса, определяемого уравнением (5.5) в прямоугольных координатах, $2a$ и $2b$, а два сопряженных диаметра этого эллипса — $2a'$ и $2b'$.

Для доказательства этого утверждения заметим, что эллиптический поворот (7.8) переводит точку эллипса с координатами $x=a$, $y=0$ в точку с координатами $x'=a\cos\varphi$, $y'=-b\sin\varphi$. Поэтому

$$a'^2=x'^2+y'^2=a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi. \tag{7.11}$$

То же преобразование переводит точку эллипса с координатами $x=0$, $y=b$ в точку с координатами $x'=a\sin\varphi$, $y'=b\cos\varphi$. Поэтому

$$b'^2=x'^2+y'^2=a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi, \tag{7.12}$$

откуда получаем равенство

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2,$$

равносильное предложению VII_{12}.

В предложении VII_{13} доказывается: «Во всякой гиперболе разность квадратов осей равна разности квадратов любых двух сопряженных диаметров» [26, с. 414—415]. Обозначим вещественную и мнимую оси гиперболы, определяемой уравнением (5.6) в прямоугольных координатах, $2a$ и $2b$, а сопряженные поперечный и восставленный диаметры этой гиперболы — $2a'$ и $2b'$.

Для доказательства этого утверждения заметим, что гиперболический поворот (7.9) переводит точку гиперболы с координатами $x=a$, $y=0$ в точку с координатами $x'=a\operatorname{ch}\varphi$, $y'=b\operatorname{sh}\varphi$. Поэтому

$$a'^2=x'^2+y'^2=a^2\operatorname{ch}^2\varphi+b^2\operatorname{sh}^2\varphi. \tag{7.13}$$

То же преобразование переводит точку сопряженной гиперболы с координатами $x=0$, $y=b$ в точку с координатами $x'=a\operatorname{sh}\varphi$, $y'=b\operatorname{ch}\varphi$. Поэтому

$$b'^2=x'^2+y'^2=a^2\operatorname{sh}^2\varphi+b^2\operatorname{ch}^2\varphi, \tag{7.14}$$

откуда получаем равенство

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2,$$

равносильное предложению VII_{13}.

В предложении VII_{31} доказывается: «Если в эллипсе или в паре сопряженных противоположных гипербол проведены два сопряженных диаметра, то параллелограмм, ограниченный диаметрами с углами, равными углам при центре, равен прямоугольнику, ограниченному осями» [26, с. 450—451]. Здесь под словом «равен» имеется в виду «обладает равной площадью».

Это предложение является следствием того, что эллиптический и гиперболический повороты (7.8) и (7.9) переводят оси эллипса и пары сопряженных гипербол в сопряженные диаметры этих конических сечений и являются эквиаффинными преобразованиями.

Зависимость прямых сторон конических сечений от диаметров

В предложениях VII_5 и VII_{32}—VII_{51} доказываются предложения о зависимости прямых сторон параболы, эллипса и гиперболы, соответствующих различным диаметрам этих конических сечений, от этих диаметров и аналогичные теоремы о зависимости других величин от диаметров этих конических сечений.

В предложении VII_5 рассматривается парабола (5.4) в прямоугольных координатах и ее диаметр, пересекающий параболу в точке с координатами x_0, y_0. Аполлоний доказывает, что прямая сторона $2p'$, соответствующая этому диаметру, связана с прямой стороной $2p$, соответствующей оси параболы, и координатой x_0 соотношением

$$2p' = 2p + 4x_0^2. \tag{7.15}$$

В предложении VII_{32} находятся некоторые следствия из предложения VII_5.

В предложениях VII_{33}—VII_{36} рассматривается гипербола (6.18) в прямоугольных координатах и находится зависимость отношения $2p'/2a'$ прямой и поперечных сторон этой гиперболы, соответствующих некоторому ее диаметру, от этого диаметра. Найденная Аполлонием зависимость отношения $2p'/2a'$ от угла φ, определяющего диаметр, и от отношения $2p/2a$ прямой и поперечной сторон этой гиперболы, соответствующих ее оси, может быть выражена формулой

$$\frac{2p'}{2a'} = \frac{\dfrac{2p}{2a} + \operatorname{th}^2 \varphi}{1 + \dfrac{2p}{2a} \operatorname{th}^2 \varphi}. \tag{7.16}$$

Формула (7.16) вытекает из соотношений $2p/2a = b^2/a^2$, $2p'/2a' = b'^2/a'^2$ и (7.13), (7.14).

В предложении VII_{33} рассматривается случай, когда $2a > 2p$, в предложении $\mathrm{VII}_{34} - p < 2a < 2p$, в предложении $\mathrm{VII}_{35} - 2a < p$. В предложении VII_{36} находятся некоторые следствия из этих трех предложений.

В предложении VII_{37} рассматривается эллипс (6.16) в прямоугольных координатах, и находится зависимость отношения $2p'/2a'$ прямой и поперечных сторон этого эллипса, соответствующих некоторому ее диаметру, от этого диаметра. Найденная Аполлонием зависимость отношения $2p'/2a'$ от угла φ, определяющего диаметр, и от отношения $2p/2a$ прямой и поперечной сторон этого эллипса, соответствующих его оси, может быть выражена формулой

$$\frac{2p'}{2a'} = \frac{\frac{2p}{2a} + \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \frac{2p}{2a} \operatorname{tg}^2 \varphi}. \tag{7.17}$$

Формула (7.17) вытекает из соотношений $2p/2a = b^2/a^2$, $2p'/2a' = b'^2/a'^2$ и (7.11), (7.12).

Конгруэнтность конических сечений

В предложениях VI_1—VI_{10} и VI_{16} доказываются теоремы о равенствах и неравенствах конических сечений и сегментов, ограниченных дугами этих сечений и хордами, стягивающими эти дуги.

Под «равными» коническими сечениями и их сегментами Аполлоний имеет в виду сечения и сегменты, которые могут быть получены друг из друга движением плоскости. В современной математике такие фигуры называются конгруэнтными. В предложении VII_{31} Аполлоний употреблял слово «равные» не для конгруэнтных, а для равновеликих параллелограммов, как это делал Евклид для многоугольников с равными площадями.

В предложении VI_1 доказывается, что две параболы равны, если равны их прямые стороны, соответствующие их осям.

В предложении VI_2 доказывается, что две гиперболы или два эллипса равны, если «равны и подобны» эйдосы этих конических сечений. «Равными и подобными» Аполлоний, как и Евклид, называл конгруэнтные многоугольники. Поэтому условием конгруэнтности двух гипербол или эллипсов с прямыми сторонами $2p_1$ и $2p_2$ и поперечными сторонами $2a_1$ и $2a_2$ являются равенства $2a_1 = 2a_2$ и $2p_1 = 2p_2$, равносильные равенствам $2a_1 = 2a_2$ и $2b_1 = 2b_2$ осей этих конических сечений.

В предложении VI_3 доказывается, что две параболы равны, если равны их прямые стороны в уравнениях в косоугольных координатах с равными координатными углами, соответствующие осям Ox этих систем координат.

В предложении VI_4 доказывается, что каждая ось эллипса делит его внутреннюю область на две конгруэнтные части.

В предложении VI_5 доказывается, что всякий диаметр эллипса также делит его внутреннюю область на две конгруэнтные части.

В предложении VI_6 доказывается, что если два сегмента двух конических сечений конгруэнтны, то конгруэнтны и сами эти конические сечения.

В предложении VI_7 Аполлоний доказывает, что оси параболы и гиперболы делят сегменты этих конических сечений, основания которых перпендикулярны их осям, на две конгруэнтные части.

В предложении VI_8 Аполлоний доказывает, что оси эллипса делят сегменты, основания которых перпендикулярны этим осям, на две конгруэнтные части и что сегменты эллипса, симметричные относительно его центра, конгруэнтны.

В предложении VI_9 доказывается, что сегменты конгруэнтных конических сечений, расположенные на равных расстояниях от их вершин, конгруэнтны, а сегменты этих сечений, расположенные на неравных расстояниях от их вершин, не конгруэнтны.

В предложении VI_{10} Аполлоний доказывает, что в неконгруэнтных конических сечениях не имеется конгруэнтных сегментов.

В предложении VI_{16} доказывается, что две противоположные гиперболы конгруэнтны.

Подобие конических сечений

В предложениях VI_{11}—VI_{15} и VI_{17}—VI_{27} доказываются теоремы о подобии и неподобии конических сечений.

В предложении VI_{11} Аполлоний доказывает, что все параболы подобны между собой.

Если две параболы не обладают общей осью и вершиной, их можно перевести в это положение движением плоскости. Если оси и вершины двух парабол совпадают, то они определяются уравнениями $y^2=2px$, $y'^2=2p'x'$ в системе прямоугольных координат с началом в общей вершине парабол и с осью Ox, направленной по их общей оси. Тогда, если $p'/p=A$, первую параболу можно перевести во вторую гомотетией (7.4).

В предложении VI_{12} Аполлоний доказывает, что все гиперболы с подобными эйдосами, соответствующими их вещественным осям, подобны между собой, и все эллипсы с подобными эйдосами, соответствующими их большим осям, подобны между собой.

Если две гиперболы или два эллипса с подобными эйдосами не обладают общими осями, их можно перевести в это положение движением плоскости.

Если оси двух гипербол или двух эллипсов совпадают, то гиперболы определяются уравнениями $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ и $x'^2/a'^2 - y'^2/b'^2 = 1$, а эллипсы — уравнениями $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ и $x'^2/a'^2 + y'^2/b'^2 = 1$ в системах прямоугольных координат с началами в центрах конических сечений и с осями Ox и Oy, направленными по осям этих сечений.

Если эйдосы двух конических сечений подобны, то стороны $2a$, $2p$, $2a'$, $2p'$ этих прямоугольников пропорциональны и, так как $2p = (2b)^2/2a$, пропорциональны и оси $2a$, $2b$, $2a'$, $2b'$ конических сечений.

Поэтому, если эйдосы конических сечений подобны и $a'/a = b'/b = A$, первую гиперболу можно перевести во вторую и первый эллипс можно перевести во второй гомотетией (7.4). Произведение движения и гомотетии является подобием общего вида.

Из предложений VI_{11} и VI_{12} следует, что все конические сечения с равными эксцентриситетами, соответствующими осям этих сечений, подобны между собой.

Если $e = 1$, конические сечения являются параболами, и утверждение следует из предложения VI_{11}.

Если $e = 0$, конические сечения являются окружностями, и утверждение следует из того, что все окружности подобны между собой.

Если $0 < e < 1$, конические сечения являются эллипсами, из равенства (5.10) следует пропорция $p/a = p'/a'$, утверждение также вытекает из предложения VI_{12}.

Если $e > 1$, конические сечения являются гиперболами, из равенства (5.11) следует пропорция $p/a = p'/a'$, и утверждение также следует из предложения VI_{12}.

В предложении VI_{13} доказывается, что все гиперболы с подобными эйдосами, соответствующие их диаметрам, которые являются осями Ox систем косоугольных координат с равными координатными углами, подобны между собой и что все эллипсы с подобными эйдосами, соответствующими их диаметрам, которые являются осями Ox систем косоугольных координат с равными координатными углами, подобны между собой. Это предложение доказывается аналогично предложению VI_{12}.

В предложениях VI_{14} и VI_{15} доказывается, что параболы не могут быть подобны гиперболам и эллипсам, а эллипсы — гиперболам.

В предложениях VI_{17}—VI_{22} находятся условия подобия сегментов двух конических сечений.

В предложениях VI_{23}—VI_{25} доказывается, что неподобные конические сечения не содержат подобных сегментов.

В предложениях VI_{26} и VI_{27} доказывается, что конические сечения, высекаемые из поверхности кругового конуса параллельными плоскостями, подобны. Так как все параболы подобны между собой, утверждения этих предложений доказываются только для гипербол и эллипсов.

Для прямого кругового конуса эти предложения вытекают из соотношения (6.26).

Аффинные преобразования конических сечений

Аналогично предложению VI_{12} можно доказать, что две гиперболы с неподобными эйдосами и два эллипса с неподобными эйдосами переводятся друг в друга аффинным преобразованием.

Если две гиперболы или два эллипса с неподобными эйдосами не обладают общими осями, их можно перевести в это положение движением плоскости.

Если оси двух гипербол или двух эллипсов совпадают, то гиперболы определяются уравнениями $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ и $x'^2/a'^2-y'^2/b'^2=1$, а эллипсы — уравнениями $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ и $x'^2/a'^2+y'^2/b'^2=1$ в системах прямоугольных координат с началами в центрах конических сечений и с осями Ox и Oy, направленными по осям этих сечений.

Если мы обозначим $a'/a=A$ и $b'/b=E$, то первую гиперболу можно перевести во вторую и первый эллипс — во второй аффинным преобразованием

$$x'=Ax, \qquad y'=Ey. \tag{7.18}$$

Произведение движения и аффинного преобразования (7.18) является аффинным преобразование общего вида. Мы уже упоминали, что окружности кругов можно перевести в эллипсы аффинными преобразованиями. Так как подобия являются частными случаями аффинных преобразований, то аффинными преобразованиями можно перевести друг в друга все гиперболы и все эллипсы, причем окружности кругов следует считать частными случаями эллипсов.

Расположение конических сечений на поверхности прямого кругового конуса

В предложениях VI_{28}—VI_{33} Аполлоний показывает, как поместить на данном прямом круговом конусе коническое сечение, подобное данному коническому сечению.

В предложении VI_{28} эта задача решается для параболы. Эта парабола высекается на поверхности конуса плоскостью, параллельной одной из его прямолинейных образующих.

В предложениях VI_{29}—VI_{30} эти задачи решаются для гиперболы и эллипса. Если угол между осью конуса и его прямолинейной образующей равен α, а эксцентриситет гиперболы или эллипса равен e, конические сечения высекаются из поверхности конуса плоскостью, угол β которой с плоскостью основания конуса связан с величинами α и e соотношениями (6.26).

В предложениях VI_{31}—VI_{33} Аполлоний строит прямые круговые конусы, содержащие параболу, гиперболу и эллипс, подобные данным коническим сечениям. Эти предложения являются обратными для предложений VI_{28}—VI_{30}.

Сравнение диаметров конических сечений с их осями

В предложениях VII_{12}, VII_{13} и VII_{31} доказываются теоремы о сопряженных диаметрах эллипсов и гипербол. К сопряженным диаметрам этих конических сечений относятся также предложения VII_{25}—VII_{28}. Аполлоний формулирует основные утверждения этих предложений следующим образом.

«В каждой гиперболе линия, равная сумме двух ее осей, меньше линии, равной сумме двух любых других сопряженных диаметров» [26, с. 440—441].

«В каждом эллипсе сумма двух его осей меньше суммы двух любых его сопряженных диаметров» [26, с. 442—443].

«В каждом эллипсе или гиперболе, оси которой неравны, превышение большей оси над меньшей больше превышения большего из любых двух сопряженных диаметров над меньшим из них» [26, с. 444—445].

«В каждой гиперболе или эллипсе прямоугольник, образованный умножением осей, меньше прямоугольника, образованного умножением любой пары сопряженных диаметров» [26, с. 444—445].

Несомненно, что в последней формулировке выражения «прямоугольник, образованный умножением» принадлежат Сабиту ибн Корре, так как Аполлоний никогда не применял термин «умножение» к непрерывным величинам.

Если мы обозначим оси эллипса и гиперболы $2a$ и $2b$, а сопряженные диаметры этих конических сечений $2a'$ и $2b'$, утверждения предложений VII_{25} и VII_{26} можно выразить формулой

$$2a+2b<2a'+2b', \tag{7.19}$$

формулировку предложения VII_{27} можно выразить формулой

$$|2a-2b|>|2a'-2b'|, \tag{7.20}$$

формулировку предложения VII_{28} можно выразить формулой

$$2a\cdot 2b<2a'\cdot 2b'. \tag{7.21}$$

Эти предложения основаны на том, что большая ось $2a$ эллипса является наибольшим из его диаметров, малая ось $2b$ эллипса — наименьшим из его диаметров, а ось $2a$ гиперболы — наименьший из ее диаметров. Если обозначить диаметры эллипса и гиперболы, отличные от их осей, через $2a'$ и $2b'$, эти соотношения для эллипса и гиперболы можно записать, соответственно, в виде

$$2a>2a', \qquad 2b<2b', \tag{7.22}$$

$$2a<2a', \qquad 2b<2b'. \tag{7.23}$$

Неравенства (7.22) равносильны неравенствам

$$2a>2a', \qquad -2b>-2b'. \tag{7.24}$$

Неравенство (7.21) для гиперболы и эллипса можно получить, перемножая левые и правые части неравенств (7.23) и (7.24). Неравенство (7.19) для гиперболы можно получить, складывая левые и правые части неравенств (7.23). Неравенство (7.20) для эллипса можно получить, складывая правые и левые части неравенств (7.24). Неравенство (7.19) для эллипса является следствием неравенства (7.21) и предложения VII_{12}. Неравенство (7.20) для гиперболы является следствием неравенства (7.21) и предложения VI_{13}.

Аполлоний не указывает, что предложения VII_{26}—VII_{28} справедливы для гиперболы не только для сопряженных диаметров, но и для произвольных диаметров, не являющихся осями.

Глава 8

ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Проективные преобразования

Доказанная Аполлонием возможность получения конических сечений всех видов с помощью пересечения одного и того же кругового конуса различными плоскостями показывает, что конические сечения всех видов можно получить из одной и той же окружности проецированием из вершины этого конуса. Отсюда следует, что теория конических сечений Аполлония тесно связана с проективной геометрией.

В предисловии к I книге «Конических сечений» Аполлоний писал, что III книга этого труда «содержит много прекрасных новых теорем». Все эти теоремы относятся к проективной геометрии.

Если проецировать некоторую плоскость E из точки S, не лежащей на ней, на некоторую другую плоскость E', то прямые плоскости E будут проецироваться на плоскость E' в виде прямых. Если аналогичным образом спроецировать плоскость E' из точки S' на плоскость E'', спроецировать плоскость E'' из точки S'' на плоскость E''' и т. д., и после конечного числа таких проецирований спроецировать плоскость $E^{(n)}$ из точки $S^{(n)}$ на первоначальную плоскость E, мы получим преобразование плоскости E, при котором прямые переходят в прямые. Такое преобразование называется проективным преобразованием плоскости. Это преобразование, однако, не является взаимно однозначным, так как в том случае, когда проецирующая прямая параллельна плоскости, на которую происходит проецирование, проецируемая точка исчезает и не имеет образа, а в том случае, когда проецируемая прямая параллельна проецируемой плоскости, точка на плоскости, на которой происходит проецирование, не имеет прообраза.

Для того, чтобы сделать проективные преобразования взаимно однозначными, следует добавить к плоскости E и ко всем плоскостям $E^{(k)}$ новые точки так, чтобы дополненные плоскости находились бы во взаимно однозначном соответствии со связками прямых, проходящих через одну точку пространства. Эти новые точки соответствуют прямым связки, параллельным дополняемым плоскостям. Если точки плоскости соответствуют прямым связки с центром S, то всякой точке M плоскости соответствует прямая SM связки. Если прямая SM будет приближаться к прямой связки, параллельной плоскости, точка M будет удаляться в бесконечность, и новые точки плоскости называются бесконечно удаленными точками. Так как всем бесконечно удаленным точкам плоскости соответствуют прямые связки, образующие такой же пучок, как прямые связки, проецирующие точки некоторой прямой плоскости, совокупность всех бесконечно удаленных точек плоскости называется бесконечно удаленной прямой этой плоскости. Плоскость, расширенная таким образом, называется проективной плоскостью.

На проективной плоскости параллельные прямые пересекаются в ее бесконечно удаленных точках. При этом прямые, параллельные одной и той же прямой, пересекаются в одной бесконечно удаленной точке и образуют пучок параллельных прямых.

Точки проективной плоскости можно представлять векторами, направленными по прямым связки, соответствующим этим точкам, эти векторы определены с точностью до ненулевого множителя. Эли Картан (1869—1951) называл эти векторы «аналитическими точками проективной плоскости».

Если в пространстве определены три линейно независимых вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, то вектор $\vec{x}$, представляющий точку X проективной плоскости, может быть записан в виде

$$\vec{x}=x^1\vec{e}_1+x^2\vec{e}_2+x^3\vec{e}_3. \tag{8.1}$$

Числа x^1, x^2, x^3 называются проективными координатами точки X. Эти координаты, как и вектор $\vec{x}$, определены с точностью до общего ненулевого множителя.

Если аффинные координаты точки X равны x и y, то проективные координаты x^i этой точки связаны с ними соотношениями

$$x=x^1/x^3, \qquad y=x^2/x^3. \tag{8.2}$$

Проективные преобразования проективной плоскости, как и аффинные преобразования, определяются как взаимно однозначные преобразования этой плоскости, переводящие прямые в прямые. Но, так как на проективной плоскости параллельные прямые пересекаются, проективные преобразования переводят параллельные прямые в пересекающиеся.

В проективных координатах проективные преобразования плоскости можно записать в виде

$$x'^i=\sum_j A^i_j x^j, \qquad i, j=1, 2, 3. \tag{8.3}$$

В аффинных координатах проективное преобразование плоскости имеет вид

$$x'=\frac{Ax+By+C}{Gx+Hy+J}, \qquad y'=\frac{Dx+Ey+F}{Gx+Hy+J}. \tag{8.4}$$

Если аффинные координаты связаны с проективными координатами соотношениями (8.2), коэффициенты формул (8.3) и (8.4) связаны соотношениями

$$\left.\begin{array}{c} A=A_1^1, \quad B=A_2^1, \quad C=A_3^1, \quad D=A_1^2, \quad E=A_2^2, \\ F=A_3^2, \quad G=A_1^3, \quad H=A_2^3, \quad J=A_3^3. \end{array}\right\} \tag{8.5}$$

Аффинные преобразования (7.2) плоскости можно рассматривать как проективные преобразования (8.3) при $A_3^1=A_3^2=0$, переводящие в себя бесконечно удаленную прямую.

Важнейшим частным случаем проективного преобразования является гомология, т. е. преобразование, при котором неподвижными точками являются все точки некоторой прямой, называемые «осью гомологии», и некоторая точка, называемая «центром гомологии». Ось гомологии и все прямые, проходящие через ее центр, являются инвариантными прямыми гомологии. Если центр гомологии не лежит на ее оси, гомологию можно привести к виду

$$x'^1=A_1^1x^1, \qquad x'^2=x^2, \qquad x'^3=x^3. \tag{8.6}$$

Если центр гомологии лежи на ее оси, гомологию можно привести к виду

$$x'^1=x^1+A_2^1x^2, \qquad x'^2=x^2, \qquad x'^3=x^3. \tag{8.7}$$

Центр гомологии (8.6) — точка E_1, ось — E_2E_3. Центр гомологии (8.7) — точка E_2, ось — прямая E_2E_3.

Сжатие и растяжение (7.3) являются частными случаями гомологии (8.6) с бесконечно удаленным центром. Гомотетия (7.4) является частным случаем гомологии (8.6) с бесконечно удаленной осью.

Параллельный перенос (7.5) является частным случаем гомологии (8.7) с бесконечно удаленной осью. Сдвиг (7.6) является частным случаем гомологии (8.7) с бесконечно удаленным центром.

Некоторые теоремы проективной геометрии были доказаны в «Поризмах» Евклида и в комментариях Паппа к этому сочинению.

Ибрахим ибн Синан в трактате о построении конических сечений рассматривал проективное преобразование

$$x'=a^2/x, \qquad y'=ay/x,$$

переводящее окружность $x^2+y^2=a^2$ в равностороннюю гиперболу.

Абу-р-Райхан ал-Бируни (973—1048) рассматривал более сложные проективные преобразования при описании «совершенной астролябии», в которой небесная сфера проецируется на плоскость не из полюса сферы, а из произвольной точки прямой, проходящей через оба ее полюса.

Проективные преобразования рассматривал также И. Ньютон в своем главной труде о классической механике «Математические

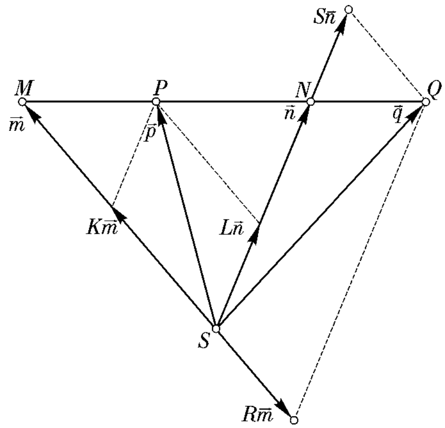


Рис. 34

начала натуральной философии» в связи с изложением необходимых сведений о конических сечениях. Ньютон называл фигуры, одна из которых получена из другой проективным преобразованием, «фигурами одного и того же рода».

Современная проективная геометрия была основана Жираром Дезаргом (1591—1661) и Жаном Виктором Понселе (1788—1867).

Более подробно с проективной геометрией читатель может познакомиться в книге [16, с. 336—408]. Об истории проективной геометрии см. [18, с. 111—116, 128—138, 143—146].

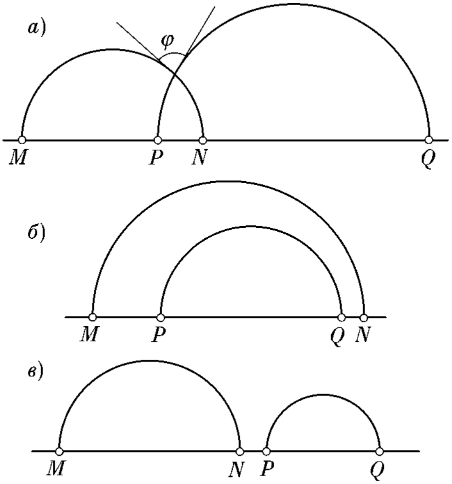


Рис. 35

Двойные отношения четверок точек

При проективных преобразованиях плоскости сохраняется инвариант четырех точек одной прямой, называемый двойным отношением этих точек. Этот инвариант можно определить следующим образом: если четыре точки M, N, P и Q представляются векторами $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$ и $\vec{q}$, то векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ являются линейными комбинациями векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$: $\vec{p}=K\vec{m}+L\vec{n}$ и $\vec{q}=R\vec{m}+S\vec{n}$. Тогда двойное отношение четырех точек M, N, P и Q равно

$$W(M, N; P, Q)=\frac{S}{R}:\frac{L}{K}. \qquad (8.8)$$

Двойное отношение (8.8) не изменяется при умножении векторов $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ на произвольные ненулевые множители. Поэтому за эти векторы можно принять, соответственно, векторы $\overrightarrow{SM}$, $\overrightarrow{SN}$, $\overrightarrow{SP}$, $\overrightarrow{SQ}$ (рис. 34).

Отсюда видно, что $K=PN/MN$, $L=MP/NM$, $R=QN/MN$, $S=MQ/NM$. Поэтому

$$W(M, N; P, Q)=\frac{MQ}{QN}:\frac{MP}{PN}. \qquad (8.9)$$

Если мы построим на парах точек M, N и P, Q окружности, для которых MN и PQ являются диаметрами, то в случае, когда пары точек разделяют друг друга, окружности пересекаются (рис. 35, *а*), а в случае, когда пары точек не разделяют друг друга, окружности не пересекаются (рис. 35, *б*, *в*). Нетрудно проверить, что двойное отношение (8.9) связано с углом φ между соответственными окружностями соотношением

$$W(M, N; P, Q) = -\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}. \tag{8.10}$$

В случае, когда окружности не пересекаются, угол φ чисто мним и равен $\varphi = i\psi$, а его тангенс равен $\operatorname{tg} \varphi = i \operatorname{th} \psi$, и формула (8.10) принимает вид

$$W(M, N; P, Q) = \operatorname{th}^2 \frac{\psi}{2}. \tag{8.11}$$

Формулы (8.10) и (8.11) показывают, что двойное отношение четырех точек отрицательно в случае разделяющих друг друга пар точек и положительно в случае пар точек, не разделяющих друг друга.

Двойные отношения были определены М. Шалем при изучении сообщений Паппа о «Поризмах» Евклида.

Принцип двойственности

Прямые линии на проективной плоскости определяются линейными уравнениями

$$u_1 x^1 + u_2 x^2 + u_3 x^3 = 0. \tag{8.12}$$

Коэффициенты u_i уравнения (8.12) называют «тангенциальными координатами» прямой линии. Эти координаты, так же как проективные координаты x^i точек, определены с точностью до ненулевого множителя. Поэтому на проективной плоскости имеет место принцип двойственности, в силу которого точки соответствуют прямым линиям и обратно, и наряду с каждой теоремой имеет место двойственная ей теорема, в которой слово «точка» заменено словами «прямая линия», слова «прямая линия» — словом «точка», выражение «точка лежит на прямой» — выражением «прямая проходит через точку», выражение «прямая проходит через точку» — выражением «точка лежит на прямой». Поэтому по принципу двойственности совокупность точек прямой линии соответствует пучку прямых, проходящих через точку.

Будем называть совокупность точки и прямой линии, не проходящей через нее, «ноль-парой», а совокупность точки и прямой, проходящей через нее, — «вырожденной ноль-парой». Центр и ось гомологии (8.6) образуют ноль-пару, центр и ось гомологии (8.7) образуют вырожденную ноль-пару, невырожденные и вырожденные ноль-пары по принципу двойственности соответствуют самим себе.

Кроме проективных преобразований (8.3), называемых «коллинеациями», в современной геометрии рассматривают другой вид преобразований, при котором точки переходят в прямые линии, а прямые линии — в пучки прямых линий. Эти преобразования называются «корреляциями» и имеют вид

$$u_i = \sum_j A_{ij} x^j, \qquad i, j = 1, 2, 3. \tag{8.13}$$

Проективные соответствия между прямыми и пучками прямых

Мы видели, что при проективных преобразованиях плоскости сохраняются двойные отношения четверок точек на прямых. Поэтому соответствие между двумя прямыми, сохраняющее двойные отношения четверок точек, называется проективным соответствием между этими прямыми. Простейший случай такого соответствия получается при проецировании одной прямой на другую из некоторой точки, такое соответствие двух прямых называется перспективным.

Проективное соответствие между двумя прямыми, как и проективное преобразование прямой, в аффинных координатах может быть записано в виде

$$x' = \frac{Ax+B}{Cx+D}. \tag{8.14}$$

Если прямые пучка с центром O пересекаются с некоторой прямой в точках M, N, P, Q, то двойное отношение $W(M, N; P, Q)$ называется также двойным отношением четырех прямых OM, ON, OP, OQ пучка. Соответствие между двумя пучками прямых, сохраняющее двойные отношения четверок прямых, называется проективным соответствием между двумя пучками прямых.

Проективные преобразования конических сечений

На проективной плоскости параболы, эллипсы и гиперболы определяются в проективных координатах уравнениями одного и того же типа

$$\sum_i \sum_j A_{ij} x^i x^j = 0, \qquad i, j = 1, 2, 3. \tag{8.15}$$

Если в аффинных координатах коническое сечение определяется уравнением (6.23) и аффинные координаты связаны с проективными соотношениями (8.2), то коэффициенты уравнений (8.15) и (6.23) связаны соотношениями

$$A = A_{11}, \quad B = A_{12}, \quad C = A_{22}, \quad D = A_{13}, \quad E = A_{23}, \quad F = A_{33}. \tag{8.16}$$

Уравнение (8.15), как и уравнение (6.23), кроме парабол, эллипсов и гипербол может определять также пары вещественных, мнимых и совпадающих прямых и мнимые конические сечения. В последнем случае бесконечно удаленная прямая делит гиперболу на две ветви.

Коллинеации (8.3) переводят бесконечно удаленную прямую в любую прямую проективной плоскости. Поэтому коллинеации проективной плоскости переводят эллипсы в параболы и гиперболы.

В том случае, когда коническое сечение (8.15) не имеет общих точек с бесконечно удаленной прямой, касается этой прямой или пересекается с этой прямой в двух точках, коническое сечение является, соответственно, эллипсом, параболой, гиперболой. Асимптоты гиперболы являются касательными к ней в ее бесконечно удаленных точках.

Гармонические четверки точек

В том случае, когда $W(M, N; P, Q) = -1$, четверка точек M, N, P, Q называется гармонической четверкой; говорят также, что пара точек P, Q гармонически разделяет пару точек M, N.

Гармонические четверки были известны еще в древности. В комментариях Паппа к «Поризмам» Евклида приводится доказательство того, что диагонали AF и BD полного четырехсторонника $ABCDEF$ (рис. 36) высекают на его третьей диагонали CE пару точек G, H, которая гармонически разделяет пару точек C, E [50, с. 677—678; 51, с. 264—267].

В том случае, когда одна из четырех точек является бесконечно удаленной, три остальные точки являются концами двух равных отрезков. В самом деле, если из четырех точек M, N, P, Q точка P устремляется в бесконечность, отношение MP/PN стремится к -1 и в пределе $W(M, N; P, Q) = MQ/QN = 1$ и $MQ = QN$.

Так как в древности математики не знали отрицательных чисел и не рассматривали длин ориентированных отрезков, они не различали знаков двойных отношений и в случае, когда пара точек P, Q гармонически разделяет пару M, N, говорили, что отношение MP/PN такое же, как отношение MQ/QN.

Гармонические четверки часто встречаются в I, III и IV книгах «Конических сечений». В предложениях IV_1, IV_9 и IV_{15} Аполлоний называл два отношения, составляющие двойное отношение гармонической четверки, выражением *homologous*, состоящим из слов *homos* — «тот же самый» и *logos* — «отношение». От этого выражения произошли слова «гомологичный», «гомологический» и «гомология», в которые в разные времена вкладывали различный смысл.

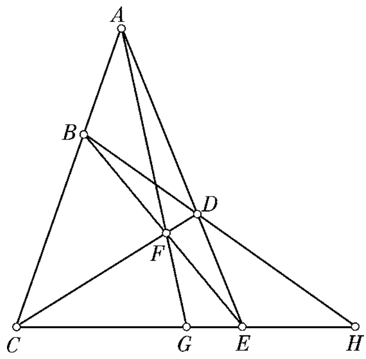


Рис. 36

Термин «гомология» в смысле вида проективного преобразования был введен Ж. В. Понселе в начале XIX в. По аналогии с этим термином М. Шаль предложил называть произвольное проективное преобразование «гомографией» (*homographie*). Отсюда произошло итальянское название *homografia* для линейных операторов.

В частности, Чезаре Бурали-Форти (1861—1931) определил «главную гомографию», связанную с каждой точкой поверхности. Если поверхность задана векторным уравнением $\vec{x}=\vec{x}(u, v)$, то в каждой точке этой поверхности определены касательная плоскость и единичный нормальный вектор $\vec{n}$. Дифференциалы $\overrightarrow{dx}$ и $\overrightarrow{dn}$ направлены по касательной плоскости и $\overrightarrow{dn}$ является линейной вектор-функцией дифференциала $\overrightarrow{dx}$

$$\overrightarrow{dn}=K\overrightarrow{dx}, \tag{8.17}$$

где K — «главная гомография» Бурали-Форти, в названии которой виден след термина Аполлония.

Основатель алгебраической топологии Анри Пуанкаре (1854—1912) назвал гомологией важнейшие понятия этой математической дисциплины. Анри Картан (р. 1904) и др. создали различные разделы «гомологической алгебры».

Термин «гомологичный» в смысле «соответственный» употреблялся Д. И. Менделеевым в химии и Н. И. Вавиловым — в биологии.

Проективные образы симметрии

Коллинеация (8.3) инволютивна в том случае, если она является гомологией (8.6) при $A_1^1=-1$. Эта гомология называется проективной симметрией относительно ноль-пары, состоящей из оси и центра этой гомологии.

Если проективная симметрия относительно ноль-пары, состоящей из прямой a и точки A, переводит точку M в точку N, прямая MN проходит через точку A и пересекает прямую a в такой точке B, что пара точек M, N гармонически разделяет пару точек A, B.

Поэтому на проективной плоскости образами симметрии являются ноль-пары.

Корреляция (8.13) инволютивна в том случае, когда матрица (A_{ij}) симметрична. Эта корреляция связана с коническим сечением, уравнение которого (8.15) имеет те же коэффициенты A и называется «полярным преобразованием» относительно этого конического сечения.

Корреляции переводят точки в прямые, а прямые — в точки, поэтому корреляции переводят ноль-пары в ноль-пары. Если рассматривать проективную плоскость не как множество точек, а как множество ноль-пар, корреляцию (8.13) можно считать проективной симметрией относительно конического сечения (8.15). В этом случае конические сечения являются образами симметрии.

Если полярное преобразование (8.13) переводит точку A в прямую a, то в современной проективной геометрии точку A называют «полюсом прямой a» и прямую a — «полярой» точки A.

Если точка A определяется проективными координатами x_0^i, то тангенциальные координаты u_i поляры a этой точки равны $\sum\limits_j A_{ij} x_0^j$ и уравнение этой поляры имеет вид

$$\sum_i \sum_j A_{ij} x_0^i x^j = 0, \qquad i, j = 1, 2, 3. \tag{8.18}$$

Если точка A определяется аффинными координатами x_0, y_0, то из формулы (8.18) следует, что уравнение поляры a точки A относительно конического сечения (6.23) имеет вид

$$Ax_0x + B(x_0y + y_0x) + Cy_0y + D(x + x_0) + E(y + y_0) + F = 0. \tag{8.19}$$

В случае параболы (5.4), эллипса (6.16) и гиперболы (6.18) уравнение поляры (8.19), соответственно, принимает вид

$$y_0y = p(x + x_0), \tag{8.20}$$

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1, \tag{8.21}$$

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1. \tag{8.22}$$

Если A и a — полюс и поляра относительно некоторого конического сечения, то при проективной симметрии относительно ноль-пары, состоящей из точки A и прямой a, это коническое сечение переходит в себя. Поэтому, если через точку A провести любую прямую, пересекающую прямую a точке B, а коническое сечение — в точках C и D, то пара точек A, B гармонически разделяет пару точек C, D.

Если точка A является точкой конического сечения, то полярное преобразование относительно этого сечения переводит точку A в касательную к сечению в этой точке. Поэтому уравнение касательной к коническому сечению (8.15) в точке с проективными координатами x_0^i имеет вид (8.18), а уравнение касательной к коническому сечению (6.23) в точке с аффинными координатами x_0, y_0 имеет вид (8.19).

Из того, что центр конического сечения является серединой его поперечной стороны, следует, что концы этой стороны гармонически разделяют пару точек, состоящую из центра сечения и бесконечно удаленной точки диаметра. Поэтому бесконечно удаленную прямую следует рассматривать как поляру центра конического сечения относительно этого сечения.

Образами симметрии проективной прямой являются пары точек. Проективная симметрия относительно пары точек A, B проективной прямой, переводящая точку X этой прямой в точку X', определяется соотношением

$$W(A, B; X, X') = -1. \tag{8.23}$$

Проективная симметрия (8.23) может быть записана в аффинных координатах a, b, x, x' точек A, B, X, X' в виде

$$x' = \frac{2ab - (a+b)x}{a+b-2x}. \tag{8.24}$$

В случае, когда $a=1$, $b=-1$, симметрия (8.24) принимает вид $x'=1/x$, в случае, когда $a=0$, $b=0$, принимает вид $x'=-x$.

Образы симметрии проективной прямой могут быть как вещественными, так и мнимо сопряженными парами точек, в последнем случае сумма $a+b$, произведение ab и, следовательно, преобразование (8.24) вещественны.

Проективные симметрии относительно пар точек прямой называются инволюциями. Термин «инволюция» был введен Дезаргом, от этого слова произошло выражение «инволютивное преобразование».

Инволюция (8.24) может быть приведена к виду

$$x' = c^2/x \tag{8.25}$$

или к виду

$$x' = -c^2/x. \tag{8.26}$$

Инволюция (8.25) является симметрией относительно пары точек с координатами c и $-c$ и называется гиперболической инволюцией.

Инволюция (8.26) является симметрией относительно пары мнимо сопряженных точек с координатами ic и $-ic$ и называется эллиптической инволюцией.

Если на проективной плоскости заданы прямая и коническое сечение, то на этой прямой определяется инволюция, в которой всякой точке X прямой соответствует точка X' пересечения прямой с полярой точки M относительно конического сечения. Эта инволюция — гиперболическая, если прямая пересекается с коническим сечением, точки их пересечения являются неподвижными точками этой инволюции. Инволюция, определяемая коническим сечением на прямой, — эллиптическая, если прямая не пересекается с коническим сечением или если коническое сечение — мнимое.

Теоремы Аполлония о полюсах и полярах

Предложения III_{30}—III_{40} и IV_1—IV_{23} «Конических сечений» Аполлония являются теоремами о свойствах полюсов и поляр конических сечений. Основным из предложений III книги о полюсах и полярах является предложение III_{37}, которое Аполлоний формулирует следующим образом. «Если две прямые, касательные к коническому сечению, к окружности круга или к противоположным гиперболам, встречаются, если проведена прямая, соединяющая точки их касания, и если из точки встречи касательных проведена прямая, пересекающая линию в двух точках, — отрезки, которые определяются прямой, соединяющей точки касания, [на отрезке секущей между точками ее пересечения с линией] относятся друг к другу как вся линия к ее отрезку во внешней области.

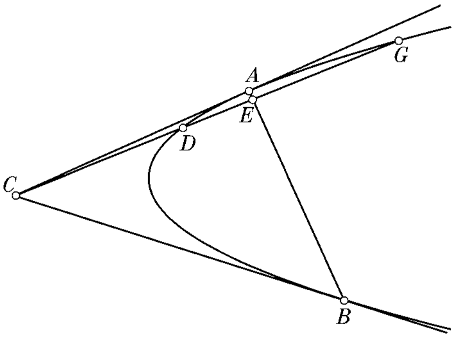


Рис. 37

Пусть коническое сечение — AB, касательные — AC и CB. Соединим AB и проведем [секущую прямую] $CDEG$ (рис. 37). Я утверждаю, что GE относится к ED как CG к CD» [25, т. 2, с. 220].

В этом предложении из внешней точки C проведены касательные AC и CB к коническому сечению и прямая CG, пересекающая сечение в точках D и G и прямую AB в точке E. Утверждается, что отношение $GE/ED=CG/CD$, т. е. что пары точек C, E и D, G гармонически разделяют друг друга. Это означает, что ноль-пара, состоящая из прямой AB и точки C, определяет проективную симметрию, переводящую коническое сечение в себя. Поэтому на языке современной геометрии точка C является полюсом прямой AB, а прямая AB — полярой точки C.

Частный случай этого предложения, когда секущая прямая является диаметром конического сечения, рассматривался в предложении I_{37}.

Из того, что касательные в концах диаметров эллипсов и пар противоположных гипербол параллельны, следует, что полюсы диаметров этих конических сечений являются бесконечно удаленными точками. Из того, что параболы касаются бесконечно удаленной прямой, следует, что все касательные к параболам пересекаются с этой прямой в бесконечно удаленных точках, откуда вытекает, что полюсы диаметров парабол также являются бесконечно удаленными точками.

В предложении III_{30} рассматривается гипербола ABC с касательными AD и CD, из точки D проводится прямая линия DKL, параллельная одной из асимптот гиперболы, пересекающая гиперболу в точке K и прямую AC — в точке L. Аполлоний доказывает, что $DK=KL$.

Поскольку асимптоты гиперболы касаются ее в бесконечно удаленных точках, прямая DKL пересекает гиперболу в одной из ее бесконечно удаленных точек. В этом случае точка D — полюс прямой

AC и пара точек D, L гармонически разделяет пару точек, состоящую из точки K и бесконечно удаленной точки прямой DKL, откуда вытекает равенство $DK=KL$.

Предложение III_{31} является аналогом предложения III_{30} для пары противоположных гипербол.

В предложении III_{32} рассматривается гипербола ABC с центром D и асимптотой DE, проводятся касательные AF и CF и диаметр DF, пересекающий гиперболу в точке B и прямую AC в точке H. Из точки F проводится прямая линия FK, параллельная прямой AC и касательной BE к гиперболе. Из точки H проводится прямая линия HLK, параллельная асимптоте DE, пересекающая гиперболу в точке L. Аполлоний доказывает равенство $HL=LK$.

В этом предложении точка F — полюс прямой AC. В том случае, когда полюс движется по прямой, его поляра вращается вокруг некоторой точки, являющейся полюсом этой прямой. Аполлоний не формулирует это утверждение в общем виде, но доказывает, что если точка F движется по прямой FK, поляра этой точки проходит через точку H, которая является полюсом FK. Наиболее просто это можно доказать следующим образом. Если координаты точки F равны x_0, y_0, то уравнение (8.22) поляры точки F при $y_0=0$ имеет вид $x=a^2/x_0$, этому же числу равна абсцисса точки H. Когда точка F движется по прямой FK, т. е. ордината y_0 не равна 0, координаты точки H удовлетворяют уравнению (8.22) поляры точки F.

Асимптота DE касается гиперболы в одной из ее бесконечно удаленных точек, и параллельная ей прямая HLK пересекает гиперболу в этой бесконечно удаленной точке. Поэтому пара точек H и K гармонически разделяет точку L и бесконечно удаленную точку прямой HLK, откуда вытекает равенство $HL=LK$. Точка F — внешняя точка гиперболы, откуда следует, что полюс H прямой FK — внутренняя точка гиперболы.

Предложение III_{33} — аналог предложения III_{32} для противоположных гипербол.

В предложении III_{34} рассматривается гипербола AB с центром D и асимптотами CD и DE. Из точки C асимптоты CD проводится касательная CBE к гиперболе, через точку B проводится прямая линия FBG, параллельная асимптоте CD, из точки C проводится прямая CAG, параллельная асимптоте DE. Аполлоний доказывает равенство $CA=AG$.

Точка C является полюсом прямой FBG, соединяющей точку B гиперболы с бесконечно удаленной точкой асимптоты CD. Так как линия CAG параллельна асимптоте DE, она пересекает гиперболу в бесконечно удаленной точке этой асимптоты. Равенство $CA=AG$ является следствием того, что точки C и G гармонически разделяют точки пересечения прямой CG с гиперболой, одна из этих точек пересечения — A, а вторая — бесконечно удаленная точка.

В предложении III_{35} рассматривается гипербола AB с асимптотами CD и DE. Из точки C проводятся касательная CBE к гиперболе и прямая $CALF$, пересекающая гиперболу в точках A и F. Через точку B проводится прямая BL. Аполлоний доказывает пропорцию

$$FC/CA = FL/LA. \tag{8.27}$$

Точка C является полюсом прямой BL, соединяющей точку B касания с бесконечно удаленной точкой асимптоты CD. Пропорция (8.27) следует из того, что точки C и L гармонически разделяют точки A и F гиперболы.

Предложение III_{36} является аналогом предложения III_{35} для пары противоположных гипербол.

В предложении III_{38} рассматривается коническое сечение AB. Из точек A и B проводятся касательные AC и CB к коническому сечению. Через точку C проводится диаметр CE, который делит хорду AB в точке E пополам, и прямая CO, параллельная хорде AB, такая, что поляра точки O проходит через точку E. Прямая EO пересекает коническое сечение в точках D и F. Аполлоний доказывает пропорцию

$$FO/OD = FE/ED. \tag{8.28}$$

Точка E является полюсом прямой CO. Пропорция (8.28) следует из того, что точки O и E гармонически разделяют точки D и F.

Точка C — внешняя точка конического сечения, откуда следует, что полюс E прямой CO — внутренняя точка этого сечения. Доказательство того, что E — полюс прямой CO, аналогично доказательству предложения III_{32}, что H — полюс прямой FK.

Предложения III_{39} и III_{40} являются аналогами предложений III_{37} и III_{38} для противоположных гипербол.

В предложениях IV_1—IV_{23} Аполлоний доказывает обратные теоремы для теорем III книги о полюсах и полярах конических сечений.

В предложении IV_1 доказывается, что если из точки D проведены касательная DB к коническому сечению и прямая, пересекающая это сечение в точках E и C, и если из точки B проведена прямая BG, пересекающая прямую DEC в такой точке G, что пара точек D и G гармонически разделяет пару точек C и E, то прямая BG пересечет коническое сечение в такой точке A, что прямая DA касается конического сечения (рис. 38, *а*).

В предложениях IV_2—IV_8 доказываются частные случаи предложения IV_1 и предельные случаи, в которые переходит это предложение при удалении некоторых его точек в бесконечность.

В предложении IV_9 доказывается, что если из точки D проведены две прямые, пересекающие коническое сечение в точках E, F и в точках G, H, то прямая KL, соединяющая точки K и L прямых DF и DH, которые вместе с точкой D гармонически разделяют пары точек E, F

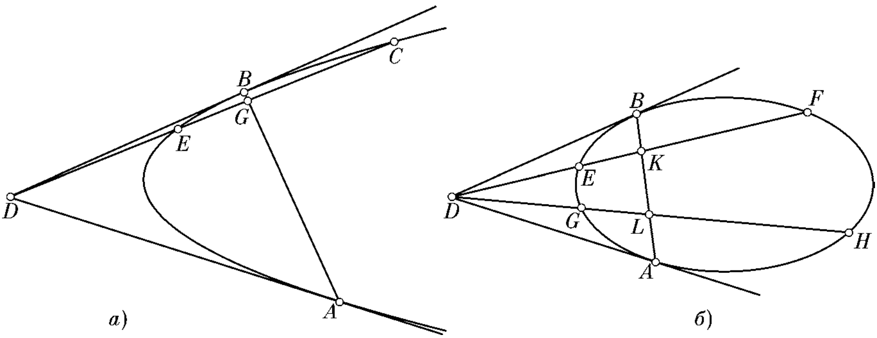


Рис. 38

и G, H, пересечет коническое сечение в таких точках A и B, что прямые DA и DB касаются конического сечения (рис. 38, *б*).

В предложениях IV_{10}—IV_{14} доказываются частные случаи предложения IV_{9} и предельные случаи, в которые переходит это предложение при удалении некоторых его точек в бесконечность.

Предложения IV_{15}—IV_{23} являются аналогами предложений IV_{1}—IV_{14} для противоположных гипербол.

Предложения IV_{1} и IV_{23} доказываются от противного, так как предположение, что прямая AB пересекает секущую не в точке, которая вместе с точкой D гармонически разделяет пару точек пересечения секущей с коническим сечением, противоречит предложениям III_{30}—III_{40}.

Построение касательных к коническому сечению с помощью проективного соответствия между прямыми

Предложение III_{41} формулируется следующим образом: «Когда три прямые, касательные к параболе, взаимно пересекаются, они пересекают друг друга в одном и том же отношении.

Пусть ABC—парабола, и пусть ADE, EGC, DBG — касательные. Я утверждаю, что CG относится к GE, как ED к DA и как GB к BD» (рис. 39) [25, т. 2, с. 230].

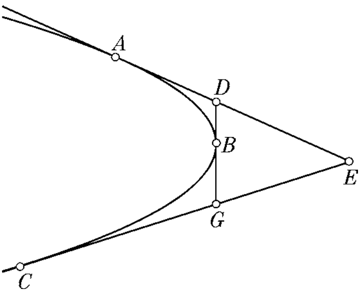


Рис. 39

Касательная к параболе в точке B отсекает на прямых EA и EC отрезки $z=ED$ и $z'=EG$. Так как точка D делит отрезок EA в том же отношении, что и точка G отрезок EC, то, если $EC=kEA$, отрезки z и z' связаны соотношением $z'=kz$, являющимся частным случаем соотношения (8.14).

Предложение III_{42} формулируется следующим образом: «Если в гиперболе, эллипсе, окружности круга или в противоположных гиперболах провести из концов диаметра прямые, параллельные ординатам, и если провести другую прямую, касательную в произвольной точке, эта касательная отсечет на двух первых прямых отрезки, ограничивающие прямоугольник, равный четверти эйдоса, приложенного к тому же диаметру.

Пусть диаметр сечения, о котором мы будем говорить, есть AB. Проведем из точек A, B [прямые] AC, DB, параллельные одной из ординат, и пусть [прямая] CED будет касательной в [точке] E. Я утверждаю, что [прямоугольник] „под AC, BD“ равен четверти эйдоса, приложенного к AB» (рис. 40, *а*, *б*) [25, т. 2, с. 234].

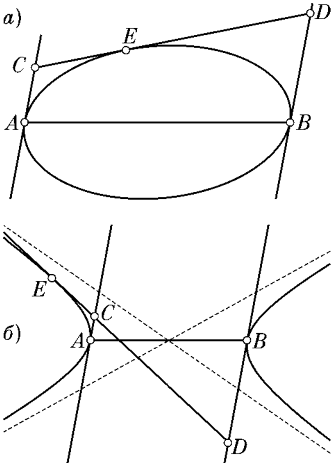


Рис. 40

Уравнение касательной к эллипсу (6.16) в его точке E с координатами x_0, y_0 имеет вид (8.21). Уравнения прямых AC и BD имеют вид $x=-a$ и $x=a$. Касательная CED пересекает эти прямые в точках с ординатами

$$y'=\frac{b^2}{y_0}\left(1-\frac{x_0}{a}\right), \qquad y=\frac{b^2}{y_0}\left(1+\frac{x_0}{a}\right).$$

Поэтому $yy'=\left(\frac{b^2}{y_0}\right)^2\left(1-\left(\frac{x_0}{a}\right)^2\right)$.

Так как E — точка эллипса, ее координаты удовлетворяют уравнению (6.16) и $yy'=b^2\left(\frac{b}{y_0}\right)^2\left(\frac{y_0}{b}\right)^2=b^2$.

Величина b^2 равна четверти площади эйдоса, равной $2a\cdot 2p=4b^2$.

Равенство $y'=b^2/y$ является частным случаем соотношения (8.14).

То же рассуждение применимо и к окружности, где $a=b$ и площадь эйдоса равна a^2.

Для гиперболы и противоположных гипербол (6.18) равенство $y'=$ $=b^2/y$ доказывается аналогично.

В предложении III_{43} доказывается, что касательная к гиперболе отсекает на ее асимптотах отрезки с общим началом в центре гиперболы, являющиеся сторонами прямоугольника, равного прямоугольнику, стороны которого отсекаются на асимптотах касательной в вершине гиперболы. Если касательная в точке B гиперболы отсекает на ее асимптотах отрезки $z=DG$ и $z'=DH$ (рис. 41), то в этом предложении утверждается, что $zz'=\text{const}$.

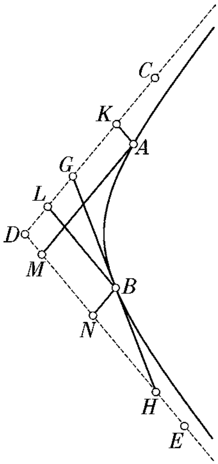


Рис. 41

Предложения III_{41}—III_{43} являются частными случаями теоремы о том, что прямые, соединяющие соответствующие точки двух прямых линий, находящихся в проективном соответствии, являются касательными к коническому сечению.

Задачам, аналогичным предложению III_{41}, посвящено сочинение Аполлония «Отсечение отношения», задачам, аналогичным предложениям III_{42} и III_{43}, посвящено сочинение Аполлония «Отсечение площади».

Пересечения конических сечений

Предложения IV_{24}—IV_{57} являются теоремами о пересечениях и касаниях конических сечений.

В предложении IV_{24} Аполлоний доказывает, что два конических сечения не могут иметь общей дуги.

В предложении IV_{25} доказывается, что число точек пересечения двух конических сечений, являющихся эллипсами, параболами и гиперболами, не может быть больше четырех (рис. 42, *а—в*).

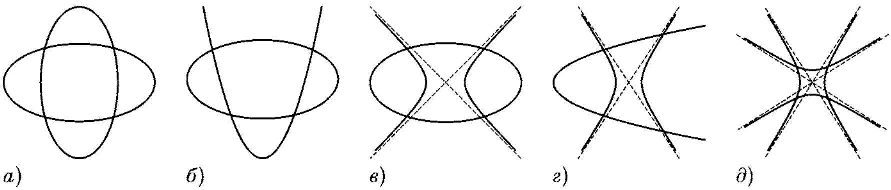


Рис. 42

В предложениях IV_{38}, IV_{40}, IV_{44}, IV_{46} и IV_{55} доказывается, что число точек пересечения пары противоположных гипербол с другой парой противоположных гипербол или с другим коническим сечением также не может быть больше четырех (рис. 42, *г*, *д*).

Циклические точки проективной плоскости

Аполлоний часто употреблял выражения «конические сечения» и «окружность круга». Эти слова показывают, что он не рассматривал окружности как частные случаи эллипса, так как античные математики называли окружности «плоскими геометрическими местами», а конические сечения — «телесными геометрическими местами», поэтому у античных математиков не возникал вопрос, почему окружности пересекаются только в двух точках и куда исчезли две другие точки пересечения окружностей.

Ж. В. Понселе, который рассматривал бесконечно удаленные и мнимые точки проективной плоскости, доказал, что на бесконечно удаленной прямой проективной плоскости имеются две мнимые точки, через которые проходят все окружности.

В самом деле, уравнение окружности с центром в точке с координатами x_0, y_0 и радиусом r

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \tag{8.29}$$

можно записать в форме уравнения (6.23) в виде

$$A(x^2+y^2)+2Dx+2Ey+F=0 \tag{8.30}$$

или в проективных координатах

$$A((x^1)^2+(x^2)^2+2Dx^1x^3+2Ex^2x^3+F(x^3)^2)=0. \tag{8.31}$$

Пересечение кривой (8.30) с бесконечно удаленной прямой $x^3=0$ определяется уравнением

$$(x^1)^2+(x^2)^2=0. \tag{8.32}$$

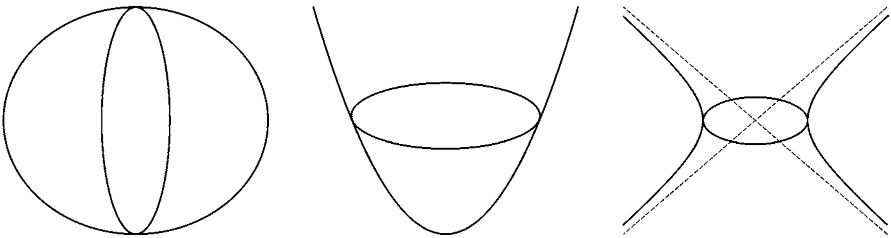
Уравнение (8.32) определяет пару мнимо сопряженных бесконечно удаленных точек одних и тех же окружностей. Эти точки Понселе назвал «циклическими точками» проективной плоскости.

Касание конических сечений

В предложениях IV_{26} и IV_{56} Аполлоний доказывает, что если два конических сечения или две пары противоположных гипербол касаются в одной точке, они могут иметь не более двух других общих точек.

Эти предложения показывают, что точка касания двух конических сечений равносильна двум точкам их пересечения.

В предложениях IV_{27} и IV_{57} доказывается, что если два конических сечения или две пары противоположных гипербол касаются в двух точках, они не могут иметь других общих точек (рис. 43, *а*—*в*).



а) *б*) *в*)

Рис. 43

В предложении IV_{30} доказывается, что две параболы могут касаться друг друга только в одной точке. В этом случае параболы имеют общую бесконечно удаленную точку, в которой касаются друг друга и бесконечно удаленной прямой.

В предложении IV_{34} доказывается, что если два эллипса с одним и тем же центром касаются друг друга в двух точках, то прямая, соединяющая точки касания, является диаметром эллипса.

Аналогичное предложение имеет место для двух пар противоположных гипербол, но Аполлоний не доказывает эту теорему.

В предложениях о касаниях конических сечений Аполлоний рассматривает только такие случаи, когда точки касания получаются слиянием двух точек пересечения и не рассматривает точки касания, которые получаются слиянием трех или четырех точек пересечения.

Точки касания, которые получаются слиянием более двух точек пересечения, были открыты в XIX—XX вв., ими являются точки касания орицикла и соприкасающейся параболы плоскости Лобачевского с абсолютным коническим сечением этой плоскости (см. [17, с. 181—182]).

Определение конического сечения по пяти точкам

Так как конические сечения пересекаются не более чем в четырех точках, коническое сечение можно однозначно определить по пяти точкам.

Пусть заданы точки A, B, C, D, E. Рассмотрим геометрическое место точек к прямым AB, BC, CD, DA. Обозначим расстояние от точки плоскости с координатами x, y до этих прямых, соответственно, d_1, d_2, d_3, d_4. Точка A удовлетворяет условиям $d_4=d_1=0$, точка B удовлетворяет условиям $d_1=d_2=0$, точка C удовлетворяет условиям $d_2=d_3=0$ и точка D удовлетворяет условиям $d_3=d_4=0$. Поэтому точки A, B, C, D удовлетворяют уравнению (6.31) при любом значении k. Конические сечения, проходящие через эти четыре точки, покрывают всю плоскость и образуют пучок конических сечений. Поэтому можно найти такое значение k, при котором коническое сечение пучка проходит через точку E. Это и будет коническое сечение, проходящее через пять данных точек (рис. 44).

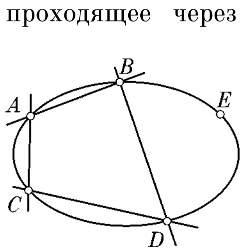


Рис. 44

Коэффициенты уравнения (6.23) этого конического сечения можно найти следующим образом. Если подставить в это уравнение координаты пяти данных точек, мы получим пять линейных уравнений с пятью неизвестными, которые являются отношениями коэффициентов уравнения (6.23) к одному из этих коэффициентов.

В том случае, когда точки C и D — циклические точки проективной плоскости, все конические сечения пучка являются окружностями и образуют пучок окружностей, проходящий через точки A и B.

Построение конического сечения с помощью проективного соответствия между пучками прямых

Предложение III_{53} формулируется следующим образом: «Если в гиперболе, эллипсе, окружности круга или в противоположных гиперболах проведены в концах одного диаметра параллели к одной из ординат и если прямые, проведенные из тех же концов [диаметра] к одной и той же точке линии [конического сечения], пересекают эти параллели, то прямоугольник под отсеченным и таким образом прямыми равен эйдосу, приложенному к тому же диаметру.

Пусть ABC — одно из сечений, о которых мы будем говорить, AC — его диаметр. Проведем [прямые] AD, CE параллельно одной из ординат (рис. 45, *а*, *б*). Проведем [прямые] ABE и CBD. Я утверждаю, что [прямоугольник] „под AD, EC“ равен эйдосу, приложенному к AC» [25, т. 2, с. 256].

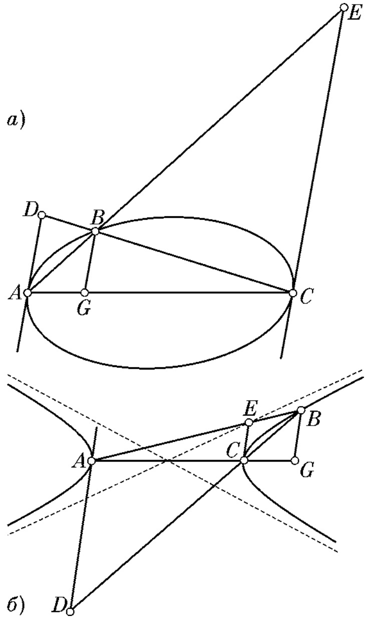


Рис. 45

В случае эллипса (6.16) проведем ординату GB точки B (рис. 45, *а*). Тогда $GB=y$, $AG=a-x$, $GC=a+x$. Из подобия треугольников GBC и ADC следует, что $z=AD=2ay/(a-x)$, из подобия треугольников AGB и ACE следует, что $z'=CE=2ay/(a+x)$. Поэтому

$$zz'=\frac{4a^2y^2}{a^2-x^2}=\frac{4y^2}{1-\dfrac{x^2}{a^2}}=\frac{4y^2}{\dfrac{y^2}{b^2}}=4b^2.$$

То же рассуждение применимо и к окружности, где $a=b$ и площадь эйдоса равна a^2.

В случае гиперболы и пары противоположных гипербол (6.18) также проведем ординату GB точки B (рис. 45, *б*). Тогда $GB=y$, $AG=x+a$, $GC=x-a$. Из подобия треугольников GBC и ADC следует, что $z=AD=2ay/(x-a)$, из подобия треугольников AGB и ACE следует, что $z'=CE=2ay/(x+a)$. Поэтому

$$zz'=\frac{4a^2y^2}{x^2-a^2}=\frac{4y^2}{\dfrac{x^2}{a^2}-1}=\frac{4y^2}{\dfrac{y^2}{b^2}}=4b^2.$$

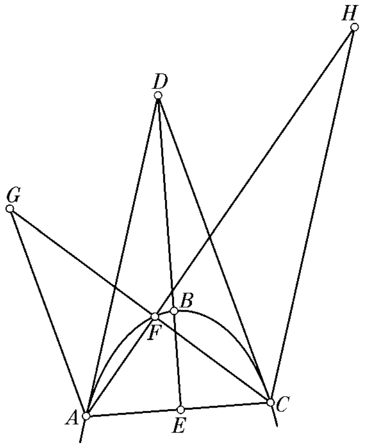


Рис. 46

Равенство $z'=4b^2/z$ является частным случаем соотношения (8.14). Поэтому произвольная точка B эллипса, гиперболы, окружности и пары противоположных гипербол является точкой пересечения соответственных прямых двух пучков с центрами A и C, которые находятся в проективном соответствии.

Предложение III_{54} формулируется следующим образом: «Если две касательные прямые к коническому сечению или к окружности круга пересекаются, если через их точки касания проведены параллели к касательным и если из точек касания к одной и той же точке линии [конического сечения] проведены прямые, пересекающие эти параллели, то отношение прямоугольника под [отсеченными] отрезками к квадрату прямой линии, соединяющей точки касания, составлено из отношения квадрата внутреннего отрезка прямой, соединяющей точку пересечения касательных с серединой прямой линии, к квадрату оставшегося отрезка и из отношения прямоугольника под касательными к четверти квадрата линии, соединяющей точки касания.

Пусть ABC — коническое сечение или окружность круга, и пусть AD и CD — касательные (рис. 46). Соединим точки A и C, разделим AC на две равные части в E и проведем [прямую] DBE. Из A проведем [прямую] AG, параллельную CD, а из C — [прямую] CH, параллельную AD. Возьмем на линии [конического сечения] точку F, соединим AF и CF и продолжим AF и CF до [точек] H и G. Я утверждаю, что отношение [прямоугольника] „под AG, CH“ к [квадрату] „над AC“ составлено из отношения [квадрата] „над EB“ к [квадрату] „над BD“ и из отношения [прямоугольника] „под ADC“ к четверти [квадрата] „над AC“, т. е. к [прямоугольнику] „под AEC“» [25, т. 2, с. 258—260].

В этом предложении также рассматриваются два пучка прямых с центрами A и C, являющимися точками конического сечения. Между прямыми этих пучков установлено соответствие, при котором прямая AC первого пучка соответствует прямой CD второго пучка касательной к коническому сечению, прямая AD первого пучка, касательная к коническому сечению, соответствует прямой CA второго пучка, а прямая AF первого пучка, проходящая через произвольную точку F конического сечения, соответствует прямой CF второго пучка. Прямые первого пучка пересекаются с прямой CH, параллельной касательной AD, а прямые второго пучка пересекаются с прямой AG, параллельной касательной CD.

В этом предложении доказывается, что отношение $AG \cdot CH/AC^2$ составлено из отношений EB^2/BD^2 и $AD \cdot DC/AE^2$. Так как линии $AC=2AE$,

EB, BD, AD и DC постоянны, отсюда следует, что произведение $AG \cdot CH$ является постоянной величиной при любом положении точки F на коническом сечении, что можно записать в виде $zz'=K$, т. е. $z'=K/z$.

Так как это равенство является частным случаем соотношения (8.14), соответствие между пучками прямых с центрами A и C является проективным.

В предложениях III_{55}—III_{56} доказываются аналогичные теоремы для пар противоположных гипербол для случаев, когда две касательные проведены в точках обеих гипербол, и когда две касательные проведены в точках одной гиперболы.

Предложения III_{53}—III_{56} являются частными случаями теоремы Якоба Штейнера (1796—1863), согласно которой всякое коническое сечение является геометрическим местом точек пересечения отвечающих друг другу прямых двух пучков, связанных проективным соответствием.

Теорема Штейнера позволяет построить коническое сечение по пяти точкам. Если даны точки A, B, C, D, E конического сечения, то по этим точкам определяются пучки, содержащие прямые AC, AD, AE и BC, BD, BE. Из точки A проводится произвольная прямая AX, а из точки B — такая прямая BY, что двойное отношение $W(BC, BD; BE, BY)$ будет равно двойному отношению $W(AB, AC; AD, AX)$. Тем самым между этими пучками будет установлено проективное соответствие. Если прямые AX и BY пересекаются в точке F, то точка F будет точкой конического сечения $ABCDE$, и таким образом можно получить любую точку этого конического сечения. Аполлоний вплотную подошел к этому построению, но не привел его, так как рассматривал двойные отношения только для случаев гармонических четверок.

На проективной плоскости имеет место принцип двойственности, согласно которому всякой теореме соответствует двойственная теорема, получаемая из нее заменой слова «точка» на слово «прямая» и обратно, а также заменой выражения «точка лежит на прямой» на выражение «прямая проходит через точку» и обратно. Теореме Штейнера по принципу двойственности проективной плоскости соответствует теорема о том, что касательные к любому коническому сечению являются прямыми, соединяющими отвечающие друг другу точки двух прямых, связанных проективным соответствием.

Частными случаями этой теоремы являются предложения III_{41}—III_{43} «Конических сечений» Аполлония.

Проективные преобразования, определяемые полюсами и полярами

Подобно тому, как аффинные симметрии относительно диаметров конических сечений порождают аффинные преобразования, переводящие в себя эти сечения, проективные симметрии относительно ноль-

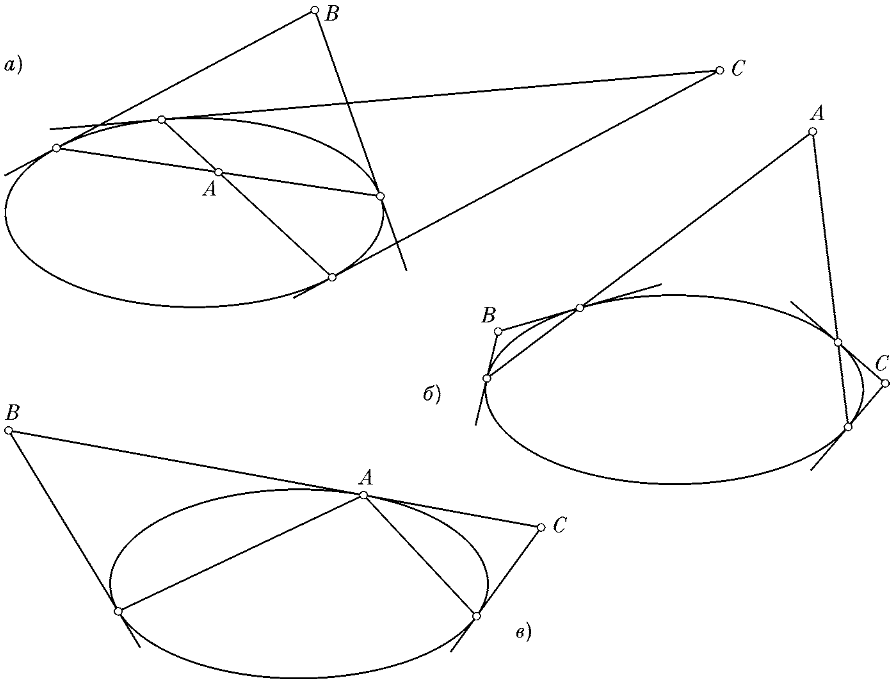


Рис. 47

пар, состоящих из полюсов и поляр относительно некоторого конического сечения, также порождают проективные преобразования, переводящих в себя это сечение.

В силу интерпретации Феликса Клейна (1849—1925) плоскости Лобачевского проективные преобразования, переводящие в себя коническое сечение, изображают движения этой плоскости.

В частности, произведение двух проективных симметрий относительно двух ноль-пар, прямые которых пересекаются во внутренней точке конического сечения (рис. 47, *а*), изображает поворот вокруг этой точки.

Произведение двух проективных симметрий относительно двух ноль-пар, прямые которых пересекаются во внешней точке конического сечения (рис. 47, *б*), изображает сдвиг вдоль прямой, являющейся полярой этой точки.

Произведение двух проективных симметрий относительно двух ноль-пар, прямые которых пересекаются в точке конического сечения (рис. 47, *в*), изображает орициклический поворот плоскости Лобачевского. С геометрией Лобачевского читатель может познакомиться в книге [17, с. 264—378].

Глава 9

ФОКУСЫ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ

Фокусы эллипса и гиперболы

Аполлоний определил фокусы эллипса и гиперболы в предложении III_{45}: «Если в гиперболе, эллипсе, окружности круга и в противоположных гиперболах в концах оси проведены прямые линии под прямыми углами [к оси] и если к этим концам с обеих сторон оси в случае гиперболы прибавлены [к оси], а в случае эллипса отняты [от оси] такие линии, что прямоугольник под линиями от их концов до концов оси равен четверти эйдоса, и если провести прямую, касательную к сечению, пересекающую перпендикулярные прямые, то прямые, проведенные из точек пересечения к „точкам выхода приложений“, образуют прямые углы в этих точках.

Пусть ось одного из сечений, о котором мы говорили, — AB, пусть AC и BD — перпендикулярные прямые, а прямая CED — касательная. Построим с каждой стороны способом, о котором мы говорили, [прямоугольники] „под AGB“ и „под AHB“, равные четверти эйдоса, и соединим CG, CH, DG, DH. Я утверждаю, что углы CGD и CHD — прямые» (рис. 48, *а*, *б*) [25, т. 2, с. 240—242].

В предложении III_{45} рассматривается не произвольный диаметр, а ось эллипса или гиперболы, а под эйдосом имеется в виду эйдос, соответствующий этой оси, т. е. прямоугольник, сторонами которого являются большая ось эллипса или вещественная ось гиперболы, рав-

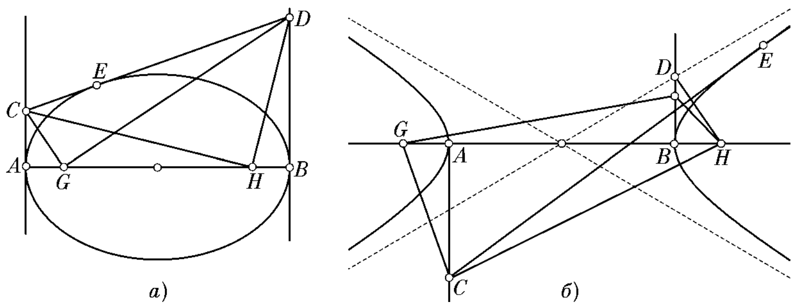


Рис. 48

ные $2a$, и прямая сторона этих сечений, рваная $2p=2b^2/a$, где b — малая ось эллипса или мнимая ось гиперболы, поэтому площадь четверти этого эйдоса равна b^2. Аполлоний определяет точки G и H оси эллипса или гиперболы таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$AG \cdot GB = AH \cdot HB = b^2. \tag{9.1}$$

Аполлоний определяет точки G и H с помощью прямоугольников «под AGB» и «под AHB», поэтому он называет эти точки «точками выхода приложений» (*ta ek tes paraboles genethepta semeia*).

В современной геометрии эти точки называются фокусами эллипса и гиперболы.

В главе 5 мы определили эксцентриситет e конического сечения, входящий в общее уравнение конического сечения (5.12). Для эллипса $e^2=(a^2-b^2)/a^2$, для гиперболы $e^2=(a^2+b^2)/a^2$, где a и b — полуоси эллипса и гиперболы.

Докажем, что в случае эллипса и гиперболы, определяемых уравнениями (6.16) и (6.18) в прямоугольных координатах, абсциссы фокусов равны ae и $-ae$. Для этого обозначим абсциссы фокусов ak и $-ak$. В случае эллипса $AG=HB=a-ak$, $AH=GB=a+ak$. Поэтому в силу равенств (9.1)

$$AG \cdot GB = AH \cdot HB = (a-ak)(a+ak) = a^2 - a^2k^2 = b^2,$$

откуда находим $k^2=(a^2-b^2)/a^2=e^2$.

В случае гиперболы $AG=HB=ak-a$, $AH=GB=ak+a$. Поэтому

$$AG \cdot GB = AH \cdot HB = (ak-a)(ak+a) = a^2k^2 - a^2 = b^2,$$

откуда находим $k^2=(a^2+b^2)/a^2=e^2$.

Доказательство предложения III_{45} вытекает из предложения III_{42}, в силу которого $AC \cdot BD = b^2$. Из этого равенства и из равенства (9.1) вытекают равенства $AG \cdot GB = AC \cdot BD$ и $AH \cdot HB = AC \cdot BD$. Первое из этих равенств определяет подобие треугольников ACG и BDG, второе из этих равенств определяет подобие треугольников ACH и BDH. Так как все эти четыре треугольника — прямоугольные, сумма углов AGC и BGD равна прямому углу, так же, как сумма углов AHC и BHD, откуда вытекает, что оба угла CGD и CHD при любом положении точки E эллипса или гиперболы — прямые.

Оптические свойства фокусов

В предложении III_{47} Аполлоний доказывает, что если прямые CH и GD пересекаются в точке J, то прямая JE, соединяющая точку J пересечения с точкой E касания, перпендикулярна касательной CED к коническому сечению в точке E (рис. 49, *а*, *б*). В современной дифференциальной геометрии прямую JE называют нормалью к эллипсу или гиперболе в точке E.

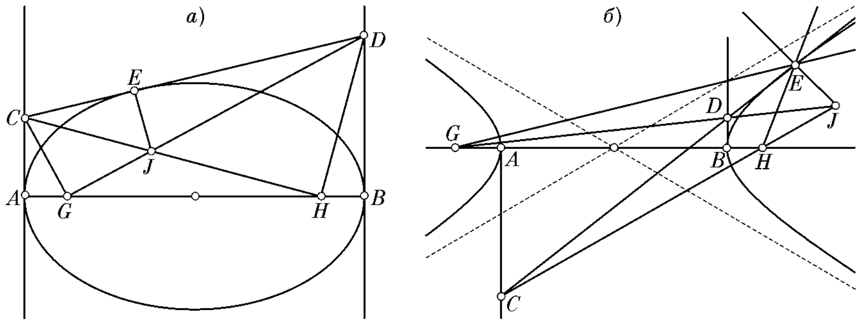


Рис. 49

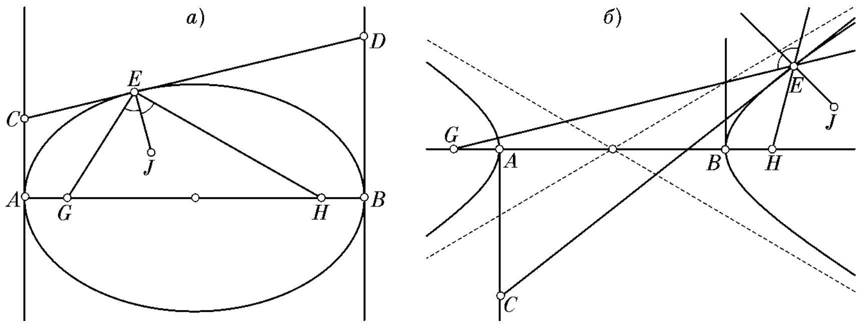


Рис. 50

На основании этой теоремы в предложении III_{48} Аполлоний доказывает, что прямые GE и HE составляют равные углы с прямой JE, а также равные углы с касательной CED (рис. 50, *а, б*). В случае эллипса это предложение означает, что лучи света, выходящие из одного его фокуса, отразившись от эллипса, соберутся в другом фокусе эллипса. Поэтому, так как лучи света обладают теплотой, то, если поместить во втором фокусе горючий материал, он загорится. Этим и объясняется слово «фокус», означающее «очаг, место огня», введенное И. Кеплером.

В случае гиперболы предложение III_{48} означает, что лучи света, выходящие из одного ее фокуса, отразятся от одной ветви гиперболы таким образом, что продолжения отраженных лучей пересекутся в другом фокусе гиперболы.

Фокальные радиус-векторы

Отрезки GE и HE, соединяющие фокусы эллипса и гиперболы с точками E этих конических сечений, в современной геометрии называются фокальными радиус-векторами точек E.

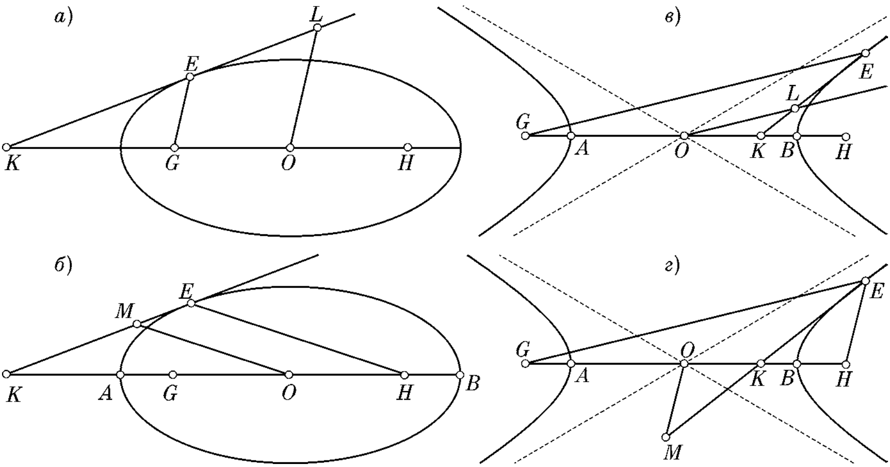


Рис. 51

В предложении III_{50} Аполлоний доказывает, что если провести из центра O эллипса или гиперболы прямые OL и OM, параллельные фокальным радиус-векторам точек E, до касательных в этих точках, то прямые OL и OM будут равны полуоси a эллипса или гиперболы.

Если мы продолжим оси эллипса или гиперболы и касательные в их точках E до их пересечения в точках K (рис. 51, *а—г*), мы получим подобные треугольники KGE, KOL и KHE, KOM.

В случае эллипса (6.16) касательная в точке E с координатами x_0, y_0 определяется уравнением (8.21), поэтому абсцисса x точки K равна a^2/x_0.

Расстояние OG равно ae, где e — эксцентриситет эллипса. Поэтому $KG = a^2/x_0 - ae$. Из подобия треугольников KGE и KOL следует, что

$$GE = \frac{OL \cdot KG}{OK} = \frac{a\left(\dfrac{a^2}{x_0} - ae\right)}{\dfrac{a^2}{x_0}} = a - ex_0. \tag{9.2}$$

Аналогично находим, что в случае эллипса

$$HE = a + ex_0. \tag{9.3}$$

В случае гиперболы (6.18) касательная в ее точке E с координатами x_0, y_0 определяется уравнением (8.22), поэтому абсцисса x точки K равна a^2/x_0.

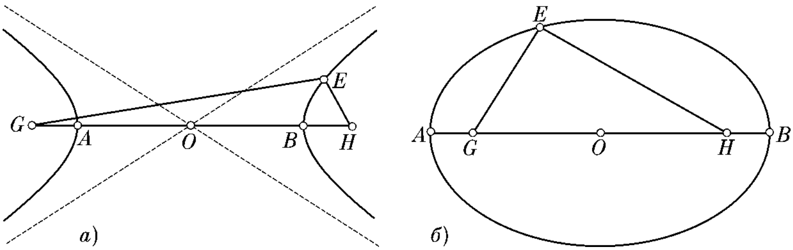


Рис. 52

Расстояние OG равно ae, где e — эксцентриситет гиперболы. Поэтому $KG = ae + a^2/x_0$. Из подобия треугольников KGE и KOL следует, что

$$GE = \frac{OL \cdot KG}{OK} = \frac{a\left(\dfrac{a^2}{x_0} + ae\right)}{\dfrac{a^2}{x_0}} = ex_0 + a. \tag{9.4}$$

Аналогично находим, что в случае гиперболы

$$HE = ex_0 - a. \tag{9.5}$$

Предложение III_{50} равносильно тому, что фокальные радиус-векторы точек эллипса имеют вид (9.2) и (9.3), а фокальные радиус-векторы точек гиперболы имеют вид (9.4) и (9.5).

На основании этой теоремы в предложении III_{51} Аполлоний доказывает, что разность фокальных радиус-векторов точек гиперболы и противоположной гиперболы постоянна и равна вещественной оси гиперболы (рис. 52, *а*), а в предложении III_{52} доказывает, что сумма фокальных радиус-векторов точек эллипса постоянна и равна большой оси эллипса (рис. 52, *б*). Утверждение предложения III_{51} вытекает из формул (9.4) и (9.5), а утверждение предложения III_{52} — из формул (9.2) и (9.3).

Последнее утверждение лежит в основе «способа садовника» создания клумб, имеющих форму эллипса, состоящего в том, что в фокусы эллипса вбиваются два кола, к ним привязывается веревка, имеющая длину большой оси эллипса, веревка натягивается палкой с острым концом, которым на земле вычерчивается заданный эллипс.

Фокусы и параметры эллипса и гиперболы

В главе 6 мы видели, что в каждой системе координат, в которой эллипсы и гиперболы определяются уравнениями (6.16) и (6.18), на осях абсцисс имеются точки, делящие пополам хорды, равные прямым сторонам эллипсов и гипербол.

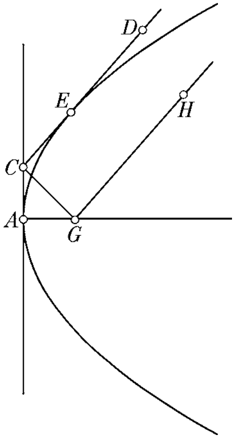


Рис. 53

Так как абсциссы этих точек определяются соотношениями $x^2=a^2-b^2$ для эллипсов и $x^2=a^2+b^2$ для гипербол в случае, когда ось абсцисс является большой осью эллипса или вещественной осью гиперболы, эти точки совпадают с фокусами сечений.

Поэтому перпендикуляр к оси эллипса или гиперболы, восставленный в фокусе сечения, пересекает коническое сечение в такой точке, ордината которой равна параметру сечения.

Фокус параболы

В «Конических сечениях» Аполлоний не рассматривал фокусов парабол. Фокусом параболы (5.4) в прямоугольной системе координат, ось абсцисс которой — ось параболы, является точка G с абсциссой $x=p/2$.

Для этой точки выполняется теорема, аналогичная предложению III_{45} для эллипсов и гипербол. Рассмотрим параболу с вершиной A и осью AB. Проведем касательную AC к параболе в ее вершине и отметим на оси параболы фокус G (рис. 53). В произвольной точке E параболы проведем касательную CED к ней, а из точки G проведем прямую GH, параллельную этой касательной, и соединим точки G и C. Тогда угол HGC — прямой.

В самом деле, касательная к параболе (5.4) в ее точке E с координатами x_0, y_0 определяется уравнением (8.20). Поэтому угловые коэффициенты прямых CED и GH равны p/y_0, а ордината точки C равна px_0/y_0. Направим ортогональные единичные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ по оси AB и по прямой AC. Тогда вектор $\vec{a}$, направленный по прямой GH, равен $\vec{i}+\dfrac{p}{y_0}\vec{j}$, а вектор $\vec{b}$, направленный по прямой GC, равен $-\dfrac{p}{2}\vec{i}+\dfrac{px_0}{y_0}\vec{j}$. Скалярное произведение этих векторов равно $\vec{a}\cdot\vec{b}=-p/2+px_0/y_0^2$.

Так как точка E — точка параболы (5.4), то $y_0^2=2px_0$, откуда следует, что $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, т. е. угол CGH — прямой.

Зажигательные зеркала

Хорошо известен аналог предложения III_{48} для параболы: фокальный радиус-вектор GE точки E параболы и диаметр EF составляют равные углы с касательной CED к параболе в ее точке E (рис. 54).

На этой теореме основаны параболические зажигательные зеркала, имеющие форму параболоидов вращения. Солнечные лучи, поступающие в эти зеркала, практически параллельны, и если они направлены по диаметрам параболоида, то, отразившись от его внутренней поверхности, эти лучи собираются в фокусе параболоида.

В главе 2 мы упоминали, что такие зеркала применял Архимед во время осады Сиракуз римлянами.

Во время работы над «Коническими сечениями» Аполлоний мог не знать об этом изобретении Архимеда, убитого римлянами при взятии ими Сиракуз.

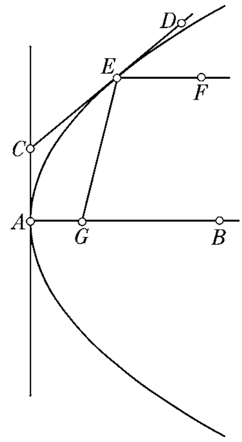


Рис. 54

Параболические зажигательные зеркала были описаны младшим современником Аполлония Диоклом в трактате «О зажигательных зеркалах» (*Peri pyrios*), сохранившемся только в арабском переводе, изданном Тумером [39] с английским переводом. В начале трактата Диокл писал: «Поверхность зажигательного зеркала, предлагаемого вам, является поверхностью, представляющей собой фигуру, образованную сечением прямоугольного конуса, вращающимся около своей оси. Эта поверхность обладает тем свойством, что все лучи отражаются в одну и ту же точку, а именно в точку [оси], расстояние которой от поверхности равно четверти линии, квадрирующей перпендикуляры, проведенные к оси» [39, с. 34—37].

Под «перпендикулярами, проведенными к оси» здесь имеются в виду ординаты точек параболы (5.4) в системе прямоугольных координат, а под «линией, квадрирующей перпендикуляры» имеется в виду прямая сторона $2p$ параболы.

Тот факт, что Диокл называл параболу термином Архимеда «сечение прямоугольного конуса», а не термином Аполлония, указывает на то, что Диокл был знаком со свойствами фокуса параболы не из сочинений Аполлония, а от ученых, близких к Архимеду. Во введении к трактату Диокл сообщал, что проблемой зажигательного зеркала занимался Досифей — друг Архимеда, которому он посвятил свои сочинения «О шаре и цилиндре», «О коноидах и сфероидах», «Квадратура сечения прямоугольного конуса» и «О спиралях».

В статье [55] Тумер писал, что в средневековой греческой рукописи, известной под названием «Математический фрагмент из Боббио», цитировался трактат Аполлония «О зажигательных зеркалах», но позднее в статье [56] Тумер сообщал, что трактат, частично изложенный в этой рукописи, на самом деле является трактатом Диокла, а не Аполлония.

Фокусы и директрисы

В «Конических сечениях» Аполлония директрисы конических сечений не упоминаются, хотя из формул (9.2) и (9.3) следует,

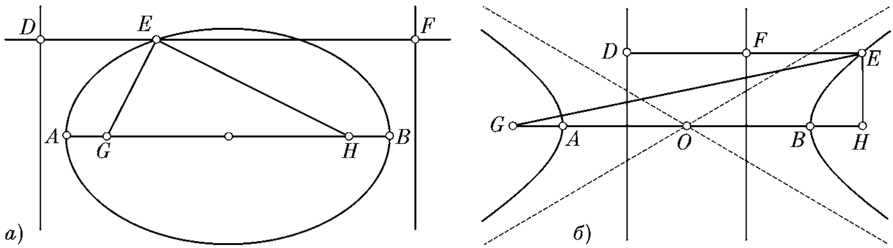


Рис. 55

что фокальные радиус-векторы точек эллипса могут быть записаны в виде

$$GE = e\left(\frac{a}{e} - x_0\right), \quad HE = e\left(\frac{a}{e} + x_0\right). \tag{9.6}$$

а из формул (9.4) и (9.5) — что фокальные радиус-векторы точек гиперболы могут быть записаны в виде

$$GE = e\left(x_0 + \frac{a}{e}\right), \quad HE = e\left(x_0 - \frac{a}{e}\right). \tag{9.7}$$

Так как разность $a/e - x_0$ равна расстоянию DE от точки E эллипса до прямой $x = a/e$, а сумма $a/e + x_0$ равна расстоянию FE от точки E эллипса до прямой $x = -a/e$ (рис. 55, *а*), равенства (9.6) можно переписать в виде

$$GE = eDE, \qquad HE = eFE. \tag{9.8}$$

Так как сумма $x_0 + a/e$ равна расстоянию DE от точки E гиперболы до прямой $x = -a/e$, а разность $x_0 - a/e$ равна расстоянию FE от точки E гиперболы до прямой $x = a/e$ (рис. 55, *б*), равенства (9.7) также можно переписать в виде (9.8).

Прямые $x = -a/e$ и $x = a/e$ являются директрисами эллипса и гиперболы. Равенства (9.8) выражают те же свойства эллипса и гиперболы, о которых писал Папп в комментариях к сочинению Евклида «Геометрические места на поверхностях».

Аналогичное свойство параболы — равенство фокальных радиус-векторов ее точек расстояниям этих точек от директрисы — в «Конических сечениях» не упоминается. По-видимому, Папп написал эти комментарии на основе предложения III_{50} «Конических сечений» и теоремы о равенстве фокальных радиус-векторов точек параболы расстояниям от этих точек до директрисы. В случае окружности фокусы совпадают с ее центром, а директрисы — с бесконечно удаленной

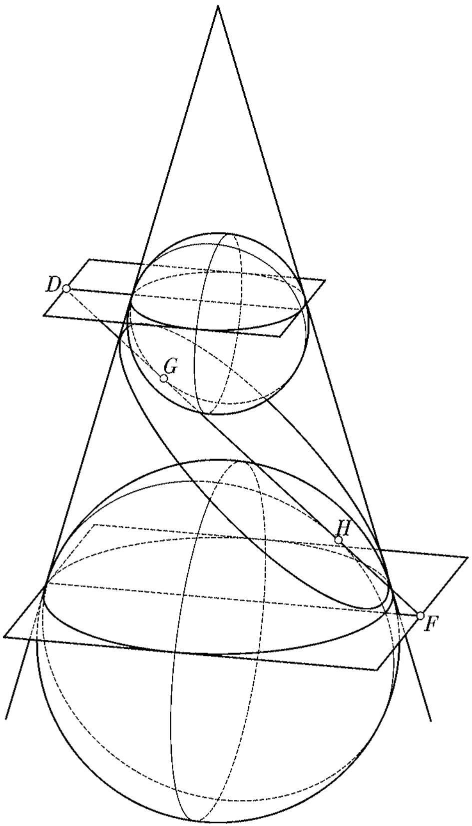


Рис. 56, *а*

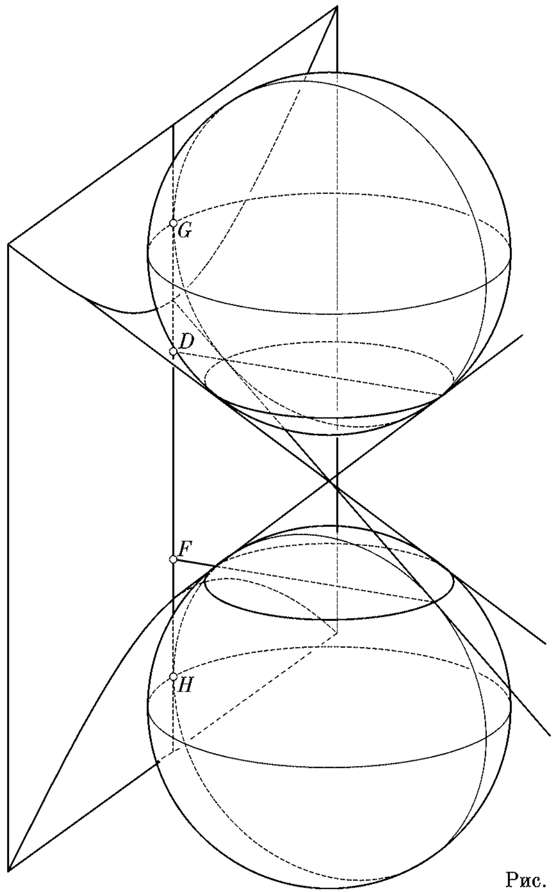


Рис. 56, *б*

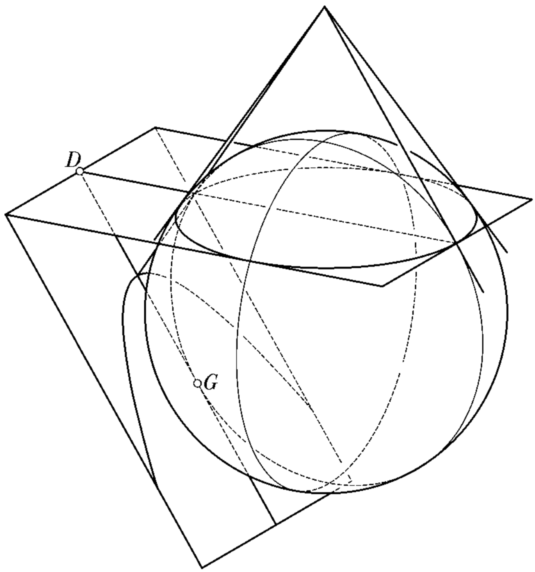


Рис. 56, *в*

прямой. Во всех случаях директрисы конических сечений являются полярами их фокусов.

Заметим, что Жерминаль Пьер Данделен (1794—1847) доказал, что фокусы и директрисы конических сечений можно получить следующим образом. Если коническое сечение высекается плоскостью из поверхности прямого кругового конуса, Данделен вписывал в коническую поверхность сферы, которые касаются этой поверхности по окружности, а плоскости конического сечения касаются в одной точке. Тогда точки касания сфер Данделена с плоскостью являются фокусами конического сечения, а плоскости окружностей касания сфер Данделена с конической поверхностью высекают из плоскости конического сечения директрисы этого сечения. На рис. 56, *а*—*в* изображены сферы Данделена для эллипса, гиперболы и параболы.

Глава 10

КОНФОРМНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Круговые преобразования

Если мы дополним евклидову плоскость не бесконечно удаленной прямой, как это делалось при определении проективной плоскости, а одной бесконечно удаленной точкой, мы получим конформную плоскость. Конформная плоскость находится во взаимно однозначном и взаимно непрерывном соответствии со сферой, такое соответствие устанавливается стереографической проекцией сферы на плоскость, рассмотренной нами в главе 4. При этой проекции бесконечно удаленной точке конформной плоскости соответствует полюс сферы, являющийся центром стереографической проекции.

Ту роль, которую на проективной плоскости играют прямые, на конформной плоскости играют окружности. Прямые конформной плоскости считаются окружностями, проходящими через ее бесконечно удаленную точку. Они, как обычные окружности, определяются тремя точками — двумя точками прямой линии и бесконечно удаленной точкой.

Круговыми преобразованиями конформной плоскости называются взаимно однозначные преобразования этой плоскости, переводящие окружности в окружности.

При стереографической проекции окружности на плоскости соответствуют окружностям на сфере, т. е. пересечениям сферы с плоскостями. Поэтому круговые преобразования конформной плоскости изображаются такими преобразованиями сферы, которые определяются на ней проективными преобразованиями пространства, переводящими эту сферу в себя. При таких преобразованиях сферы сохраняются углы между линиями на ней, а так как при стереографической проекции углы между линиями на сфере равны углам между соответственными линиями на плоскости, при круговых преобразованиях конформной плоскости также сохраняются углы между линиями.

Наиболее общие преобразования, сохраняющие углы между линиями, называются конформными преобразованиями. Поэтому круговые преобразования конформной плоскости являются частными случаями конформных преобразований. В пространстве дело обстоит не так.

Жозеф Лиувилль (1809—1882) доказал, что всякое конформное преобразование пространства переводит сферы в сферы.

Конформным пространством называется евклидово пространство, дополненное единственной бесконечно удаленной точкой, причем плоскости считаются сферами, проходящими через эту точку. Круговые преобразования конформной плоскости являются аналогами конформных преобразований конформного пространства.

Круговые и конформные преобразования плоскости рассматривались Леонардом Эйлером и Жаном Лероном Даламбером (1717—1783).

Более подробно о конформной геометрии и ее истории см. [16, с. 480—516; 18, с. 142—143, 145—147].

Двойные отношения

Конформную прямую, представляющую собой евклидову прямую, дополненную одной бесконечно удаленной точкой, можно рассматривать как проективную прямую. Поэтому на конформной прямой, а также на любой окружности конформной плоскости можно определить двойные отношения четверок точек. Эти двойные отношения в случае двух пар точек, разделяющих друг друга, связаны с углами φ между окружностями, определяемыми этими парами точек, соотношениями (8.10). В случае пар точек, не разделяющих друг друга, эти

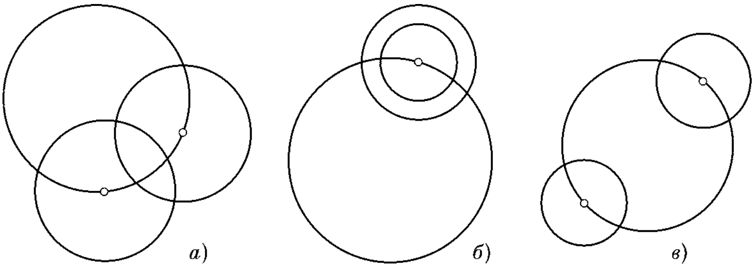


Рис. 57

двойные отношения связаны с мнимыми углами $i\psi$ между окружностями, определяемыми этими парами точек, соотношением (8.11). Эти двойные отношения изображены на рис. 57, *а—в*, полученных круговыми преобразованиями из рис. 35, *а—в*.

Инверсии относительно окружностей

Важнейшим частным случаем кругового преобразования плоскости является инверсия относительно окружности. Инверсию относительно окружности (8.29) с центром O с координатами x_0, y_0

и радиусом r можно определить как переход от произвольной точки X плоскости к точке X' пересечения прямой OX с полярой точки X относительно окружности.

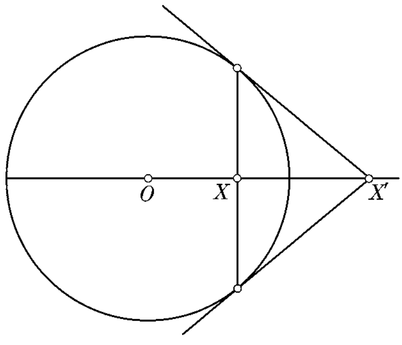


Рис. 58

В случае, когда $x_0 = y_0 = 0$, уравнение (8.29) принимает вид

$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (10.1)$$

Поляра точки X с координатами x_1, y_1 относительно окружности (10.1) определяется уравнением

$$x_1 x + y_1 y = r^2. \qquad (10.2)$$

В случае, когда $y_1 = 0$, уравнение (10.2) принимает вид $x_1 x = r^2$. Поэтому абсцисса x_2 точки X' определяется соотношением

$$x_1 x_2 = r^2. \qquad (10.3)$$

Формулу (10.3) можно переписать в виде

$$OX \cdot OX' = r^2. \qquad (10.4)$$

Поэтому инверсия относительно окружности с центром O и радиусом r (рис. 58) переводит всякую точку X плоскости в такую точку X' прямой OX, которая находится по ту же сторону от точки O, что и точка X, и удовлетворяет условию (10.4).

Если мы обозначим радиус-вектор $x\vec{i} + y\vec{j}$ точки с координатами x, y через $\vec{z}$, то уравнения (8.29) и (10.1) можно записать в векторной форме

$$(\vec{z} - \vec{z}_0)^2 = r^2, \qquad (10.5)$$

$$\vec{z}^2 = r^2, \qquad (10.6)$$

где в левой части формул (10.5) и (10.6) стоят скалярные квадраты векторов $\vec{z} - \vec{z}_0$ и $\vec{z}$.

Если мы обозначим векторы $\overrightarrow{OX}$ и $\overrightarrow{OX}'$ через $\vec{z}$ и $\vec{z}'$, то инверсию относительно окружности (10.6) можно записать в векторной форме

$$\vec{z}' = \vec{z} r^2 / \vec{z}^2. \qquad (10.7)$$

При инверсии (10.7) точки окружности (10.6) остаются неподвижными, а центр окружности переходит в бесконечно удаленную точку конформной плоскости. Нетрудно проверить, что при инверсии (10.7) окружности конформной плоскости переходят в окружности и сохраняются углы между линиями.

Аполлоний определил инверсию относительно окружности в предложении I_{37}, которое формулируется следующим образом. «Если

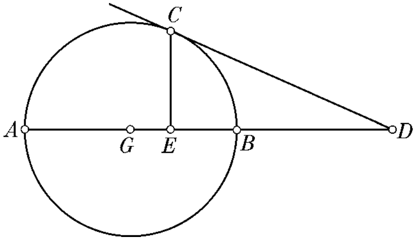


Рис. 59

касательная прямая к гиперболе, эллипсу или окружности круга пересекается с диаметром и из точки касания проводится ордината к этому диаметру, то прямая, отсекаемая ординатой [от этого диаметра] со стороны центра сечения, ограничит вместе с прямой, отсекаемой касательной со стороны центра сечения, площадь, равную квадрату прямой, выходящей из центра. Также она ограничит вместе с прямой, находящейся между ординатой и касательной, площадь, относящуюся к квадрату ординаты, как поперечная сторона к прямой стороне.

Пусть диаметр гиперболы, эллипса или окружности круга — AB. Проведем касательную CD и ординату CE, пусть G — центр. Я утверждаю, что [прямоугольник] „под DGE“ равен [квадрату] „над GB“ и что поперечная сторона относится к прямой стороне как [прямоугольник] „под DEG“ к [квадрату] „над EC“» (рис. 59) [25, т. 1, с. 296—298].

Первое утверждение этого предложения, относящееся к окружности, равносильно формуле (10.4). В случае окружности $a=b=p$, и поэтому $2a/2p=1$. Отсюда следует, что второе утверждение этого предложения, относящееся к окружности, равносильно равенству $DE \cdot EG = EC^2$, т. е.

$$(DG-EG) \cdot EG = EC^2 = AE \cdot EB = (r+EG) \cdot (r-EG) = r^2 - EG^2,$$

что равносильно равенству $DG \cdot EG = r^2$, т. е. той же формуле (10.4).

В предложении I_{37} Аполлоний, кроме инверсии относительно окружности, определил аналогичные преобразования, связанные с эллипсом и гиперболой.

Мы рассмотрим эти преобразования в главе 11.

В «Конических сечениях» Аполлоний не описывал свойств инверсии относительно окружности, и, в частности, не упоминал о том, что при этой инверсии окружности переходят в окружности и сохраняются углы между линиями.

Аполлонию было известно, что при инверсии относительно окружности, окружности переходят в окружности, это видно из описания I книги сочинения Аполлония «Плоские геометрические места» в VII книге «Математического собрания» Паппа. Папп передавал утверждение Аполлония следующим образом: «Если из одной или двух данных точек проведены две прямые линии, параллельные или содержащие данный угол, находящиеся в данном отношении или содержащие данную площадь, и конец одной из этих прямых описывает данное по положению плоское геометрическое место, то конец другой прямой также опишет данное по положению плоское геометрическое место того же или другого рода» [50, с. 498; 51, с. 106—107].

Здесь под «прямыми линиями» имеются в виду прямолинейные отрезки и рассматриваются отрезки OX и OX', расположенные на одной или на двух пересекающихся прямых, или отрезки OX и $O'X'$, расположенные на одной или на двух параллельных или пересекающихся прямых.

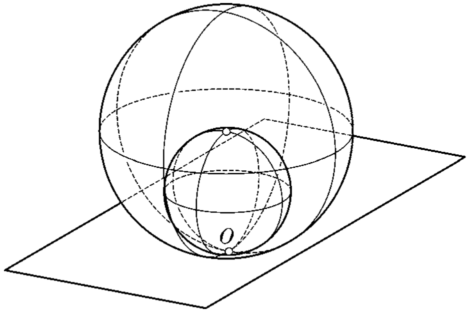


Рис. 60

В том случае, когда отрезки OX и OX' расположены на одной прямой и имеют постоянное отношение, переход от точки X к точке X' является гомотетией (7.4). В том случае, когда эти отрезки имеют постоянное произведение, переход от точки X к точке X' является инверсией (10.7). Плоские геометрические места двух родов — это окружности и прямые.

В остальных упоминаемых здесь случаях переход от точки X к точке X' является комбинацией гомотетии или инверсии с параллельным переносом на отрезок OO' или с поворотом на угол между прямыми OX и OX' или $O'X'$. Комбинации гомотетии с движениями плоскости являются произвольными подобиями, комбинации инверсии относительно окружности с движением плоскости являются произвольными круговыми преобразованиями плоскости.

Мы не имеем сведений, знал ли Аполлоний о том, что при инверсии относительно окружности сохраняются углы между линиями.

Большое сходство свойств стереографической проекции и инверсии относительно окружности объясняется тем, что стереографическую проекцию можно получить с помощью инверсии относительно сферы, определяемой аналогично инверсии относительно окружности. В самом деле, рассмотрим сферу с центром O и находящуюся внутри нее другую сферу, касающуюся ее и проходящую через точку O (рис. 60). Тогда инверсия относительно большой сферы определит стереографическую проекцию малой сферы на плоскость, касающуюся обеих сфер в их точке касания.

Пучки окружностей

Папп в VII книге «Математического собрания» писал, что в начале II книги сочинения Аполлония «Плоские геометрические места» доказываются следующие предложения: «(1) Если две прямые, проведенные из двух точек, пересекаются и если квадраты, построенные на этих прямых, отличаются на данную площадь, то точка их пересечения находится на прямой, известной по положению. С другой стороны, (2) если эти прямые находятся в данном отношении, то [точка их

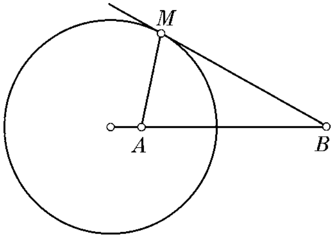


Рис. 61

пересечения] будет находиться на прямой или на дуге [окружности]» [50, с. 498—499; 51, с. 110—111].

Геометрическое место, определяемое предложением (1), является прямой, перпендикулярной к прямой линии, соединяющей две данные точки. Если A и B — две данные точки, M — произвольная точка определяемого геометрического места, N — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую AB, то $AM^2=AN^2+NM^2$, $BM^2=BN^2+HM^2$ и разность $AM^2-BM^2=AN^2-BN^2$ равна постоянной площади.

Геометрическое место, определяемое предложением (2), является прямой в случае, когда отношение проведенных линий равно 1, и окружностью, если это отношение больше или меньше 1. На рис. 61 изображена такая окружность, для которой отношение расстояний AM и BM равно 1/2. Такие окружности рассматривались Аристотелем в «Метеорологике» при доказательстве того, что радуга имеет форму дуги круга. Аристотель рассматривал Солнце, восходящее в точке H окружности круга горизонта, наблюдателя, находящегося в центре K этого круга, и точку M облака, в которой луч HM отражается в виде отрезка MK. Аристотель считал, что отношение HM к MK постоянно и писал: «Точки K и H даны, даны прямые HK и MH, а следовательно, и отношение MH к MK. Так вот, [оказывается, что точка] M лежит на окружности; обозначим эту окружность через NM. Ни к какой другой окружности, кроме MN, нельзя провести прямых из тех же точек с тем же отношением друг к другу в той же плоскости» [3, с. 522].

Европейские ученые познакомились с этими окружностями по описанию Паппа «Плоских геометрических мест» Аполлония, поэтому в настоящее время эти окружности называются окружностями Аполлония.

В главе 8 мы определили гиперболические и эллиптические инволюции точек на прямой (8.25) и (8.26). Если для каждой пары соответственных точек этих инволюций построить окружность, для которой эти точки являются концами диаметра, мы получим пучки окружностей. Пучок окружностей, определяемый гиперболической инволюцией, называется гиперболическим пучком (рис. 62, *а*), пучок окружностей, определяемый эллиптической инволюцией, называется эллиптическим пучком (рис. 62, *б*).

Окружности Аполлония образуют гиперболический пучок. Неподвижными точками инволюции, определяющей этот пучок, являются те точки, расстояния которых до точек этих окружностей имеют постоянные отношения. Окружности эллиптического пучка проходят через две точки, расположенные симметрично относительно прямой инволюции.

Если на сфере проведены параллели и меридианы, то при стереографической проекции сферы на плоскость из любой точки сферы параллели изображаются окружностями гиперболического пучка, а меридианы — окружностями эллиптического пучка. В частности, при проецировании небесной сферы на плоскость астролябии альмукантараты (параллели горизонта) изображаются окружностями гиперболического пучка, а вертикали — окружностями эллиптического пучка. При этом неподвижными точками гиперболической инволюции и точками пересечения окружностей эллиптического пучка являются изображения зенита и надира — точки, диаметрально противоположной зениту.

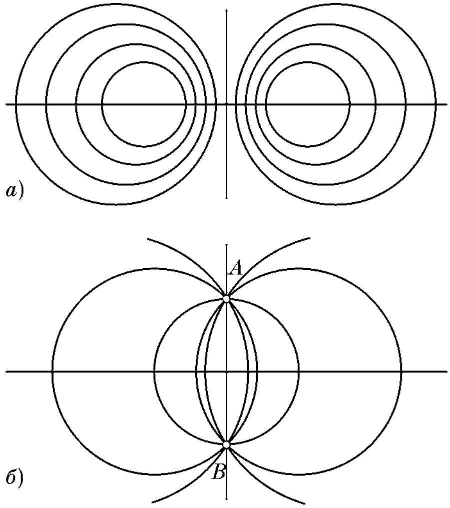


Рис. 62

Несомненно, что между предложениями (1) и (2) II книги «Плоских геометрических мест» Аполлония имелось более общее предложение. Пусть A и B — две данные точки, и даны отношение γ и площадь c. Требуется найти геометрическое место точек G, для которых

$$GA^2-\gamma GB^2=c.$$

Предложение (1) — частный случай этого предложения при $\gamma=1$, предложение (2) — частный случай этого предложения при $c=0$.

В случае, когда γ больше или меньше 1, геометрические места, определяемые этим предложением, — окружности.

Доказательство этого общего предложения со ссылкой на Аполлония было приведено в «Избранных задачах» Ибрахима ибн Синана [44, с. 238].

Круговые преобразования и комплексные числа

Плоскость комплексного переменного $z=x+iy$ можно рассматривать как евклидову плоскость, причем за расстояние между комплексными числами z_1 и z_2 принимается модуль $|z_2-z_1|$ их разности (квадрат модуля $|z|$ комплексного числа z равен произведению $z\bar{z}$ числа z на комплексно сопряженное число $\bar{z}=x-iy$, т. е. $|z|^2=x^2+y^2$).

Движения плоскости имеют вид

$$z'=Az+B, \qquad z'=A\bar{z}+B, \tag{10.8}$$

где $|A|=1$, подобия плоскости имеют вид (10.8), где $|A|\neq 1$.

Плоскость комплексного переменного, дополненную бесконечно удаленной точкой, можно рассматривать как конформную плоскость.

Круговые преобразования этой плоскости можно записать в виде

$$z' = \frac{Az+B}{Cz+D}, \qquad z' = \frac{A\bar{z}+B}{C\bar{z}+D}. \tag{10.9}$$

На плоскости комплексного переменного можно определить двойные отношения четверок точек:

$$W(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{z_4 - z_1}{z_2 - z_4} : \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3}. \tag{10.10}$$

В случае, когда все числа z_i вещественны, двойное отношение (10.10) совпадает с двойным отношением (8.9). При круговых преобразованиях (10.9) двойные отношения четверок точек сохраняются или заменяются комплексно сопряженными числами. Поэтому в случае, когда все четыре точки z_i лежат на одной окружности, двойное отношение (10.10) вещественно. Двойные отношения четверок точек на окружностях связаны с вещественными или мнимыми углами между окружностями, определяемыми этими четверками точек, как это показано на рис. 57, *а—в*, соотношениями (8.10) и (8.11).

Произвольные конформные преобразования плоскости определяются дифференцируемыми функциями комплексного переменного $w = f(z)$, обладающими производными dw/dz, и функциями $\overline{w} = \overline{f(z)}$, получаемыми из дифференцируемых функций $w = f(z)$ переходом к комплексно сопряженным числам. В случае таких функций дифференциалы dz и dw связаны соотношениями

$$dw = a\,dz, \qquad d\overline{w} = a\,d\bar{z}, \tag{10.11}$$

где a — комплексное число. Так как соотношения (10.11) — частные случаи соотношений (10.8), преобразования (10.11) являются подобиями, откуда вытекает конформность отображений, определяемых указанными функциями. Так как первая из функций (10.9) — алгебраическая функция, обладающая производной, все круговые преобразования плоскости — в частности, инверсии относительно окружностей — являются конформными преобразованиями.

Конформные образы симметрии

Так как соотношение (10.4) симметрично относительно точек X и X', инверсия относительно окружности является инволютивным круговым преобразованием. Поэтому окружности являются образами симметрии конформной плоскости, роль симметрии относительно этих образов играют инверсии, переводящие внутреннюю область окружностей в их внешние области, а внешние области — во внутренние.

Стереографическая проекция переводит инверсию относительно окружности на плоскости в такое преобразование сферы, которое определяется проективной симметрией пространства относительно ноль-пары, состоящей из плоскости, высекающей окружность из сферы, и из полюса этой плоскости относительно сферы.

Окружность на плоскости комплексного переменного с центром z_0 и радиусом r определяется уравнением

$$(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)=r^2, \tag{10.12}$$

которое можно переписать в виде

$$Az\bar{z}+B\bar{z}+\bar{B}z+C=0 \qquad (A=\bar{A}, \quad C=\bar{C}) \tag{10.13}$$

либо в виде

$$Az\bar{z}+B\bar{z}-\bar{B}z+C=0 \qquad (A=-\bar{A}, \quad C=-\bar{C}). \tag{10.14}$$

Инверсия относительно окружности (10.13) имеет вид

$$z'=-\frac{B\bar{z}+C}{A\bar{z}+\bar{B}}. \tag{10.15}$$

Инверсия относительно окружности (10.14) имеет вид

$$z'=\frac{B\bar{z}-C}{A\bar{z}+\bar{B}}. \tag{10.16}$$

На конформной плоскости имеется и другой вид образов симметрии — пары точек. Симметрия относительно пары точек A, B, переводящая точку X в точку X', имеет тот же вид (8.23), что и симметрия относительно пары точек на проективной прямой. Если точки A, B, X, X' изображаются комплексными числами a, b, z, z', эта симметрия изображается на плоскости комплексного переменного преобразованием

$$z'=\frac{2ab-(a+b)z}{a+b-2z}, \tag{10.17}$$

аналогичным преобразованию (8.24) проективной прямой.

Глава 11

ИНВЕРСИИ ОТНОСИТЕЛЬНО КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ

Инверсии относительно эллипсов и гипербол

В предложении I_{37} «Конических сечений» Аполлоний определяет, кроме инверсии относительно окружности, также инверсии относительно эллипса и гиперболы с центром O. Эти инверсии, как и в случае окружности, являются переходами от произвольной точки M плоскости к точке N пересечения диаметра OM с полярой точки M относительно конического сечения.

В первом утверждении предложения I_{37}, относящемся к эллипсу и гиперболе, доказывается, что произведение отрезков GD и GE, соединяющих центр G конического сечения с точками D и E, соответствующими друг другу в инверсии, равно квадрату отрезка GB, соединяющего центр G сечения с точкой B пересечения эллипса или гиперболы с прямой GD (рис. 63, *а*, *б*). Это утверждение равносильно формуле (10.4), где r — половина диаметра AB.

В случае эллипса и гиперболы $2a/2p=a^2/b^2$. Поэтому второе утверждение этого предложения, относящееся к эллипсу и гиперболе, равносильно пропорции

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{DE\cdot EG}{EC^2}. \tag{11.1}$$

В случае эллипса $DE=GD-GE$, и формулу (11.1) можно переписать в виде

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{(GD-GE)\cdot GE}{EC^2}=\frac{GD\cdot EG-GE^2}{EC^2}.$$

Сравнив эту формулу с уравнением эллипса с двумя абсциссами (5.7), которое можно переписать в виде

$$EC^2=\frac{b^2}{a^2}\cdot AE\cdot EB, \tag{11.2}$$

мы находим, что

$$GD\cdot GE-GE^2=AE\cdot EB=(GB+GE)(GB-GE)=GB^2-GE^2,$$

откуда получаем равенство $GD\cdot GE=GB^2$, равносильное равенству (10.4).

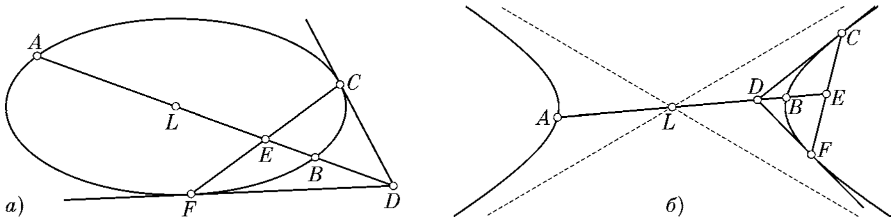


Рис. 63

В случае гиперболы $DE = GE - GD$ и формулу (11.1) можно переписать в виде

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{(GE - GD) \cdot GE}{EC^2} = \frac{GE^2 - GD \cdot EG}{EC^2}.$$

Сравнивая эту формулу с уравнением гиперболы с двумя абсциссами (5.8), которое также можно переписать в виде (11.2), мы находим, что

$$GE^2 - GD \cdot GE = AE \cdot EB = (GE + GB)(GE - GB) = GE^2 - GB^2,$$

откуда снова получаем равенство $GD \cdot GE = GB^2$, равносильное равенству (10.4).

Инверсия относительно параболы

В предложении I_{35} Аполлоний определяет инверсию относительно параболы. Эта инверсия также является переходом от произвольной точки M плоскости к точке N пересечения диаметра, проходящего через точку M, с полярой этой точки. В этом предложении говорится: «Если прямая, встречающая диаметр во внешней области сечения, является касательной к параболе, то ордината, проведенная из точки касания к диаметру, отсечет на диаметре от вершины сечения прямую, равную той, которая находится между вершиной и касательной, и никакая прямая не будет находиться между касательной и сечением.

Пусть диаметр параболы — AB [ее вершина — H]. Проведем ординату BC, и пусть прямая AC — касательная к сечению. Я утверждаю, что AH равна HB» (рис. 64) [25, т. 1, с. 292].

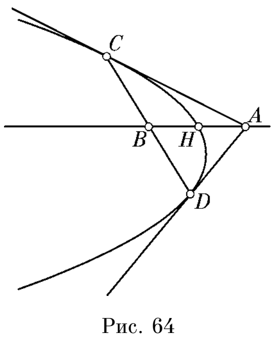


Рис. 64

Так как прямая BC — поляра точки A, пара точек A, B гармонически разделяет пару точек, состоящую из вершины H и бесконечно удаленной точки. Поэтому $AH = HB$. То, что между параболой и касательной AC к ней не может находится никакая прямая, было доказано в предложении I_{32}.

Кремоновы преобразования

Инверсии относительно эллипсов, гипербол и парабол, так же как инверсии относительно окружностей, являются инволютивными преобразованиями. Так как все эти преобразования выражаются рациональными функциями координат и совпадают с преобразованиями, обратными к ним, все они являются бирациональными преобразованиями, т. е. такими преобразованиями, что и сами они, и обратные к ним преобразования выражаются рациональными функциями координат.

Бирациональные преобразования называются также кремоновыми преобразованиями по имени Луиджи Кремоны (1830—1903), который создал общую теорию этих преобразований.

И. Ньютон в «Перечислении линий третьего порядка» указал девять кривых третьего порядка, получаемых из конических сечений бирациональными преобразованиями, которые он называл «гиперболизмами».

Б. А. Розенфельд и З. А. Скопец [20] доказали, что всякое квадратичное кремоново преобразование является комбинацией инверсии относительно окружности, равносторонней гиперболы или параболы и проективного преобразования.

Инверсии относительно эллипсов, гипербол и парабол можно рассматривать как кремоновы симметрии относительно этих сечений.

Псевдоевклидов аналог круговых преобразований

Особую роль среди инверсий относительно гипербол играют такие инверсии, в которых гиперболы — равносторонние, асимптоты которых направлены по биссектрисам координатных углов прямоугольной системы координат. Такие гиперболы можно рассматривать как окружности псевдоевклидовой плоскости, т. е. плоскости, на которой расстояние d между точками с координатами x_1, $y_1)$ и x_2, y_2 определяется по формуле

$$d^2=(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2. \tag{11.3}$$

Расстояния на такой плоскости могут быть вещественными и чисто мнимыми. На прямых с направляющими векторами $\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{i}-\vec{j}$ расстояния равны нулю, такие прямые называются «изотропными».

Окружности псевдоевклидовой плоскости определяются уравнениями

$$(x-x_0)^2-(y-y_0)^2=r^2, \tag{11.4}$$

где радиус r может быть вещественным и чисто мнимым.

В случае, когда $x_0=y_0=0$, уравнение (11.4) принимает вид

$$x^2-y^2=r^2. \tag{11.5}$$

Поляра точки M с координатами x_1, y_1 относительно окружности (11.5) определяется уравнением

$$x_1 x - y_1 y = r^2. \qquad (11.6)$$

В случае, когда $y=0$, уравнение (11.6) принимает вид $x_1 x = r^2$. Поэтому абсцисса x_2 точки N определяется соотношением (10.3), которое можно переписать в виде (10.4).

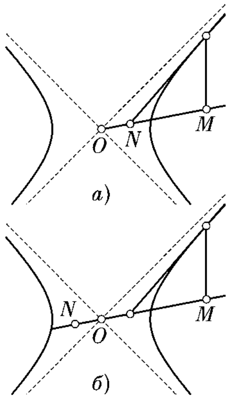


Рис. 65

Поэтому инверсия относительно окружности (11.5) при $r^2 > 0$ (рис. 65, *а*) переводит всякую точку M плоскости в такую точку N прямой OM, которая находится по ту же сторону от точки O, что и точка M, и удовлетворяет условию (10.4). Инверсия относительно окружности (11.5) при $r^2 < 0$ (рис. 65, *б*) переводит всякую точку M плоскости в такую точку N прямой OM, которая находится по другую сторону от точки O и удовлетворяет условию (10.4).

На псевдоевклидовой плоскости скалярное произведение векторов $\vec{z}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}$ и $\vec{z}_2 = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}$ имеет вид

$$\vec{z}_1 \vec{z}_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2. \qquad (11.7)$$

Если радиус-вектор точки с координатами x, y является вектором $\vec{z} = x\vec{i} + y\vec{j}$, то уравнения (11.3) и (11.4) можно записать в векторной форме (10.5) и (10.6), где в левой части стоят скалярные квадраты векторов $\vec{z} - \vec{z}_0$ и $\vec{z}$.

Если мы обозначим векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ через $\vec{z}$ и $\vec{z}'$, то инверсию относительно окружности (11.5) можно записать в векторной форме (10.7).

Для того чтобы инверсии относительно окружностей псевдоевклидовой плоскости были бы взаимно однозначными преобразованиями, следует дополнить псевдоевклидову плоскость одной бесконечно удаленной точкой, которая при инверсиях относительно всех окружностей соответствует центрам этих окружностей, и «идеальными точками», которые при инверсиях относительно всех окружностей соответствуют точкам асимптот этих окружностей. Псевдоевклидова плоскость, дополненная таким образом, называется псевдоконформной плоскостью.

Прямые псевдоевклидовой плоскости можно рассматривать как окружности псевдоконформной плоскости, проходящей через ее бесконечно удаленную точку.

Псевдоконформная плоскость находится во взаимно однозначном и взаимно непрерывном соответствии с линейчатой поверхностью второго порядка в проективном пространстве. Для установления этого соответствия следует определить псевдоевклидово пространство, в котором расстояние d между точками с координатами x_1, y_1, z_1

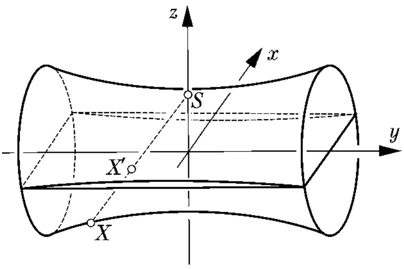


Рис. 66

и x_2, y_2, z_2 задается формулой

$$d^2=(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2. \qquad (11.8)$$

Псевдоевклидову плоскость следует погрузить в это пространство в виде плоскости $z=0$. В псевдоевклидовом пространстве следует рассмотреть сферу

$$x^2-y^2+z^2=1 \qquad (11.9)$$

и установить стереографическую проекцию этой сферы из ее точки $S(0, 0, 1)$ на плоскость $z=0$, параллельную касательной плоскости $z=1$ к сфере в центре проекции (рис. 66). Затем следует дополнить псевдоевклидово пространство до проективного. При этом дополнении сфера (11.9) превратится в линейчатую поверхность второго порядка. При указанной проекции плоские сечения сферы, проходящие через центр проекции, изобразятся прямыми псевдоевклидовой плоскости, плоские сечения сферы, не проходящие через центр проекции, — окружностями этой плоскости, а прямолинейные образующие сферы — изотропными прямыми плоскости. Центр стереографической проекции изображает бесконечно удаленную точку псевдоконформной плоскости, а прямолинейные образующие сферы, проходящие через центр проекции, — идеальные прямые, состоящие из идеальных точек псевдоконформной плоскости.

Заметим, что сфера

$$x^2-y^2+z^2=-1 \qquad (11.10)$$

мнимого радиуса имеет вид двуполостного гиперболоида, каждая из полостей которого изометрична плоскости Лобачевского; стереографическая проекция этой сферы из ее точки с координатами $(0, 1, 0)$ на евклидову плоскость $y=0$ определяет интерпретацию Пуанкаре плоскости Лобачевского в круге евклидовой плоскости, а проекция этой сферы из ее центра на евклидову плоскость $y=1$ — интерпретацию Клейна плоскости Лобачевского в круге евклидовой плоскости.

Четырехмерный аналог псевдоевклидова пространства с координатами x, y, z, t применяется для геометрической интерпретации пространства-времени в специальной теории относительности.

Взаимно однозначные преобразования псевдоконформной плоскости, переводящие окружности этой плоскости в окружности, так же, как в случае конформной плоскости, называются круговыми преобразованиями. Эти преобразования изображаются проективными преобразованиями проективного пространства, переводящими в себя линейчатую поверхность второго порядка.

При инверсии относительно окружности (11.4) псевдоевклидовой плоскости точки этой окружности остаются неподвижными, центр окружности переходит в бесконечно удаленную точку псевдоконформной плоскости, а асимптоты окружности переходят в идеальные прямые этой плоскости. Нетрудно проверить, что при инверсии (10.7) окружности псевдоконформной плоскости переходят в окружности и сохраняются углы между линиями.

Так как инверсии относительно окружностей псевдоконформной плоскости являются инволютивными преобразованиями, при которых точки этих окружностей остаются неподвижными, эти инверсии можно рассматривать как псевдоконформные симметрии относительно окружностей.

Ту роль, которую для евклидовой плоскости играют комплексные числа, для псевдоевклидовой плоскости играют двойные числа $z = x + ey$, где $e^2 = 1$.

Плоскость двойного переменного можно рассматривать как псевдоевклидову плоскость, причем за расстояние между двойными числами z_1 и z_2 принимается модуль $|z_2 - z_1|$ их разности (квадрат модуля $|z|$ двойного числа z равен произведению $z\bar{z}$ числа z на сопряженное двойное число $\bar{z} = x - ey$, т. е. $|z|^2 = x^2 - y^2$).

Движения псевдоевклидовой плоскости имеют вид (10.8) при $|A|^2 = 1$, подобия псевдоевклидовой плоскости имеют вид (10.8) при $|A|^2 > 0$, $|A|^2 \neq 1$. Преобразования (10.8) при $|A|^2 = -1$ называются «антидвижениями», преобразования (10.8) при $|A|^2 < 0$, $|A|^2 \neq -1$ называются «антиподобиями» псевдоевклидовой плоскости. Движения $z' = (\operatorname{ch}\varphi + e\operatorname{sh}\varphi)z$ псевдоевклидовой плоскости являются гиперболическими поворотами (7.9).

Плоскость двойного переменного, дополненную бесконечно удаленной и идеальными точками, можно рассматривать как псевдоконформную плоскость. Круговые преобразования этой плоскости имеют вид (10.9).

На плоскости двойного переменного можно определить двойные отношения четверок точек (10.10), которые при круговых преобразованиях (10.9) этой плоскости сохраняются или заменяются сопряженными двойными числами. Двойные отношения четверок точек вещественны, если эти точки лежат на одной прямой или окружности.

Окружность на плоскости двойного переменного с центром z_0 и радиусом r определяется уравнением (10.12), которое можно переписать в виде (10.13) и (10.14). Инверсии относительно окружностей (10.13) и (10.14) имеют, соответственно, вид (10.15) и (10.16).

Произвольные конформные преобразования псевдоевклидовой плоскости определяются дифференцируемыми функциями двойного переменного $w = f(z)$ и функциями, получаемыми из дифференцируемых функций переходом к сопряженным двойным числам. В случае таких функций имеют место соотношения (10.11). Функции (10.9), определяющие круговые преобразования плоскости двойного переменного, являются частными случаями этих функций.

Более подробно о псевдоевклидовой и псевдоконформной геометрии см. [16, с. 517—597].

Изотропный аналог круговых преобразований

В псевдоевклидовом пространстве, расстояние между точками которого определяется по формуле (11.8), кроме евклидовых плоскостей, таких как $y=0$, и псевдоевклидовых плоскостей, таких как $z=0$, имеются также изотропные плоскости, такие как $y=z$. Евклидовы плоскости не содержат вещественных изотропных прямых, все отрезки которых имеют нулевую длину, через каждую точку псевдоевклидовой плоскости проходят две изотропные прямые, через каждую точку изотропной плоскости проходит одна изотропная прямая.

Инверсия относительно параболы, определенная Аполлонием в предложении I_{35} «Конических сечений», связана с геометрией изотропной плоскости.

На изотропной плоскости расстояние d между точками с координатами x_1, y_1 и x_2, y_2 определяется по формуле

$$d=|x_2-x_1|, \tag{11.11}$$

а в случае, когда $d=0$, между этими точками определяется расстояние

$$d'=|y_2-y_1|. \tag{11.12}$$

Изотропными прямыми этой плоскости являются прямые $x=\mathrm{const}$.

Если на изотропной плоскости задан треугольник ABC, сторона BC которого расположена на изотропной прямой, находящейся на расстоянии $d=1$ от точки A, то за величину угла BAC принимается расстояние d' между точками B и C.

Геометрическим местом точек изотропной плоскости, отстоящих от точки O с координатами x_0, y_0 на расстоянии r, является пара изотропных прямых, определяемых уравнением

$$(x-x_0)^2=r^2. \tag{11.13}$$

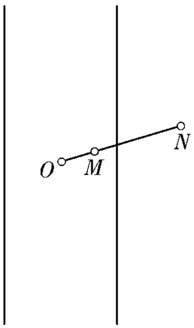


Рис. 67

Будем называть пару изотропных прямых (11.13) с данной точкой O окружностью изотропной плоскости с центром O и радиусом r. В случае, когда $x_0=y_0=0$, формула (11.13) принимает вид

$$x^2=r^2. \tag{11.14}$$

На изотропной плоскости можно определить инверсии относительно окружностей. В случае окружности (11.14) инверсия имеет вид (10.7), где z^2 в случае этой плоскости равняется x^2 (рис. 67).

Другим аналогом окружностей на изотропной плоскости являются циклы, имеющие вид парабол с изотропными диаметрами.

Как известно, в окружности евклидовой плоскости все вписанные углы PAQ с произвольной вершиной A, опирающиеся на одну и ту же дугу PQ, равны между собой, так как каждый из них равен половине центрального угла POQ (рис. 68, *а*). Докажем, что циклы изотропной плоскости обладают аналогичным свойством, т. е. циклы являются геометрическими местами точек этой плоскости, из которых отрезок неизотропной прямой виден под одним и тем же углом. Рассмотрим отрезок PQ неизотропной прямой и углы PAQ равной величины, опирающиеся на этот отрезок. Эти углы равны длине d' отрезка BC между точкой B прямой AP и точкой C прямой AQ, расстояния d от которых до точки A равны 1 (рис. 68, *б*). Пусть координаты точки A равны x, y, координаты точки P равны p, q, а координаты точки Q равны (r, s). Тогда координаты любой точки прямой AP равны $x+(p-x)t$, $y+(q-y)t$. Для точки B значение t равно $1/(p-x)$, и ордината точки B равна $y+(q-y)/(p-x)$. Аналогично получаем, что ордината точки C равна $y+(s-y)/(r-x)$. Поэтому величина K угла PAQ равна

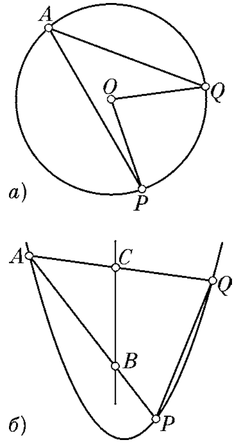


Рис. 68

$$K=\frac{s-y}{r-x}-\frac{q-y}{p-x}. \tag{11.15}$$

Соотношение (11.15) является уравнением искомого геометрического места. Это уравнение можно переписать в виде

$$(r-p)y=Kx^2+((r-q)-(p-r)K)x+qr-sp+rpK,$$

т. е. уравнение (11.15) является уравнением цикла.

Этим свойством обладают все циклы изотропной плоскости. На рис. 69 изображена инверсия относительно цикла изотропной плоскости.

Движениями изотропной плоскости называются взаимно однозначные преобразования этой плоскости, сохраняющие расстояния d и d' между ее точками. Эти преобразования имеют вид

$$x'=Ax+C, \qquad y'=Dx+Ey+F, \tag{11.16}$$

где $|A|=|E|=1$. Преобразования (11.16) при $|A|\neq 1$, $|E|\neq 1$ называются подобиями изотропной плоскости.

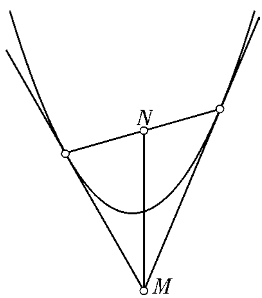


Рис. 69

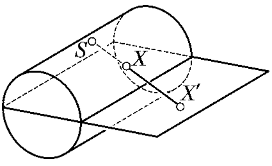


Рис. 70

Для того чтобы инверсии относительно окружностей (11.13) были бы взаимно однозначными преобразованиями, изотропную плоскость следует дополнить одной бесконечно удаленной точкой, в которую при инверсиях переходят центры окружностей, и идеальными точками, в которые переходят точки изотропных прямых, проходящих через центры окружностей. Изотропная плоскость, дополненная таким образом, называется «квазиконформной плоскостью». Квазиконформная плоскость находится во взаимно однозначном и взаимно непрерывном соответствии с прямым круговым цилиндром. Такое соответствие можно получить с помощью стереографической проекции цилиндра $x^2+y^2=1$ из его точки с координатами $(0, 1, 0)$ на плоскость $y=0$ (рис. 70).

Проекции прямолинейных образующих цилиндра будем считать изотропными прямыми квазиконформной плоскости.

Проекции сечений цилиндра плоскостями, проходящими через центр проекции, являются неизотропными прямыми квазиконформной плоскости.

Проекции сечений цилиндра плоскостями, не проходящими через центр проекции и не параллельными плоским образующим цилиндра, являются циклами квазиконформной плоскости.

Будем рассматривать неизотропные прямые квазиконформной плоскости как циклы этой плоскости, проходящие через ее бесконечно удаленную точку.

Преобразования квазиконформной плоскости, являющиеся произведениями подобий и инверсий относительно окружностей и циклов, переводят циклы в циклы и называются «циклическими преобразованиями». Эти преобразования изображаются на поверхности цилиндра отображениями, определяемыми проективными преобразованиями, переводящими поверхность цилиндра в себя. Циклические преобразования квазиконформной плоскости являются аналогами круговых преобразований конформной плоскости.

Четырехмерный аналог изотропной плоскости с координатами x, y, z, t применяется для геометрической интерпретации пространства-времени классической механики.

Ту роль, которую для евклидовой и псевдоевклидовой плоскостей играют комплексные и двойные числа, для изотропной плоскости играют дуальные числа $z=x+\varepsilon y$, где $\varepsilon^2=0$. Плоскость дуального переменного можно рассматривать как изотропную плоскость, причем на расстояние d между дуальными числами $z_1=x_1+\varepsilon y_1$, $z_2=x_2+\varepsilon y_2$ принимается $|x_2-x_1|$, а при $d=0$ за расстояние d' между этими числами принимается $|y_2-y_1|$.

Движения изотропной плоскости имеют вид (10.8) при $|A|^2=1$, подобия изотропной плоскости имеют вид (10.8) при $|A|^2\neq 1$.

Движения изотропной плоскости $z' = (1 + \varepsilon t)z$ являются сдвигами вдоль изотропных прямых, отличающимися от сдвигов (7.6) взаимной заменой координат x и y.

Плоскость дуального переменного, дополненную бесконечно удаленной и идеальными точками, можно рассматривать как квазиконформную плоскость.

Циклические преобразования этой плоскости можно записать в виде (10.9).

Окружность на плоскости дуального переменного с центром O и радиусом r определяется уравнением (10.12), которое можно переписать либо в виде (10.13), либо в виде (10.14). Инверсия относительно окружностей (10.13) и (10.14) имеет, соответственно, вид (10.15) и (10.16).

Циклы на плоскости дуального переменного определяются уравнениями (10.13). Инверсия относительно цикла (10.13) имеет вид (10.15).

Более подробно об изотропной и квазиконформной геометрии см. [17, с. 262—389].

Глава 12

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Касательные к коническим сечениям

Первое понятие дифференциальной геометрии — касательные к кривым. Касательные к коническим сечениям были определены в предложениях I_{17} и I_{32} «Конических сечений» и применялись в I книге при определении инверсии относительно окружностей и конических сечений и в III книге при определении полюсов и поляр относительно конических сечений и фокусов эллипсов и гипербол.

В современной дифференциальной геометрии касательная к кривой, определяемой уравнением $F(x, y)=0$, в ее точке с координатами x_0, y_0, является прямой

$$F'_x(x-x_0)+F'_y(y-y_0)=0, \tag{12.1}$$

где F'_x и F'_y — частные производные функции $F(x, y)$ при $x=x_0$, $y=y_0$.

В случае, когда $F(x, y)$ совпадает с левой частью уравнения (6.23),

$$F'_x=2(Ax_0+By_0+D), \qquad F'_y=2(Bx_0+Cy_0+E). \tag{12.2}$$

Подставляя значения (12.2) в уравнение (12.1), мы получим уравнение (8.19).

Предложения II_{49}—II_{53} являются задачами на построение касательных к коническим сечениям.

Предложение II_{49} — задача о проведении касательных к коническому сечению из данной точки плоскости.

Если дана точка конического сечения, то из нее опускается перпендикуляр на ось сечения, находится точка этой оси, соответствующая основанию перпендикуляра в инверсии относительно конического сечения; прямая линия, соединяющая эту точку с данной точкой конического сечения, является искомой касательной.

Если дана внешняя точка конического сечения, лежащая на его оси, то находится точка этой оси, соответствующая данной точек в инверсии относительно конического сечения, в этой точке восставляется перпендикуляр к оси; прямая линия, соединяющая точку пересечения этого перпендикуляра с коническим сечением и данную точку оси, является искомой касательной.

Если дана произвольная внешняя точка конического сечения, через эту точку проводится диаметр сечения, находится точка этого диаметра, соответствующая данной точке в инверсии относительно конического сечения, из этой точки проводится прямая, параллельная касательной к коническому сечению в точке его пересечения с диаметром; прямая линия, соединяющая точку пересечения этой прямой с коническим сечением и данную точку диаметра, является искомой касательной.

Предложения II_{50} и II_{53} — задачи о проведении к коническим сечениям касательных, образующих данный острый угол с осью сечения или с диаметром, проходящим через точку касания.

Нормали к коническим сечениям

Нормали к коническим сечениям, т. е. перпендикуляры к касательным, восставленные в точках касания, для случаев эллипсов и гипербол рассматривались в предложении III_{47}. В современной дифференциальной геометрии нормаль к кривой $F(x, y) = 0$ в ее точке с координатами x_0, y_0 является прямой

$$F'_y(x - x_0) - F'_x(y - y_0) = 0. \tag{12.3}$$

В случае конического сечения (6.23), нормаль в его точке с координатами x_0, y_0 имеет вид

$$(Bx_0 + Cy_0 + E)(x - x_0) - (Ax_0 + By_0 + D)(y - y_0) = 0. \tag{12.4}$$

В случае параболы (5.4), эллипса (6.16) и гиперболы (6.18), уравнение (12.4) принимает, соответственно, вид

$$y_0(x - x_0) + p(y - y_0) = 0, \tag{12.5}$$

$$\frac{y_0}{b^2}(x - x_0) + \frac{x_0}{a^2}(y - y_0) = 0, \tag{12.6}$$

$$\frac{y_0}{b^2}(x - x_0) - \frac{x_0}{a^2}(y - y_0) = 0. \tag{12.7}$$

На рис. 71, *а—в* изображены нормали к коническим сечениям.

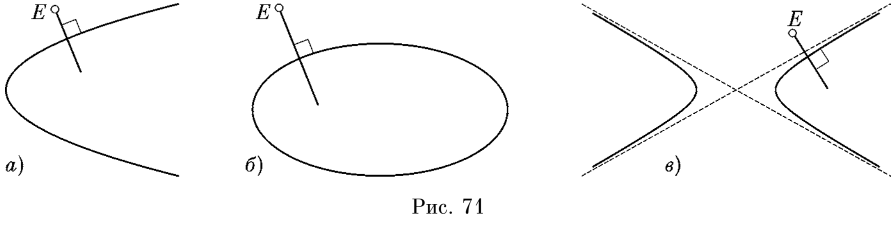


Рис. 71

Нормали к параболе

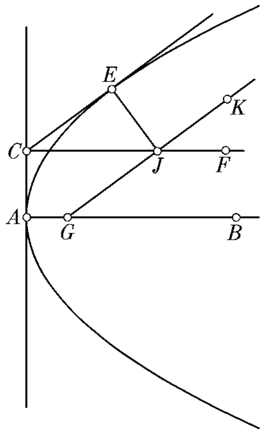


Рис. 72

В главе 9 мы видели, что для предложений III_{45} и III_{48} имеются аналоги, относящиеся к параболе. Имеется такой аналог и для предложения III_{47}. Этот аналог состоит в следующем. Если в вершине A параболы проведена касательная AC, а в ее произвольной точке E — касательная CE, ось параболы — AB, параллельно оси проведена прямая CF и из фокуса G — прямая GK, параллельная касательной CE, и если прямые GK и CF пересекаются в точке J, то прямая JE является нормалью к параболе (рис. 72).

В самом деле, касательная к параболе (5.4) является прямой (8.20). Поэтому координаты точки C равны $x=0$, $y=px_0/y_0$. Уравнение прямой CF имеет вид $y=px_0/y_0$. Координаты фокуса G равны $x=p/2$, $y=0$. Если мы запишем уравнение прямой GK в виде $y=kx+h$, то ее угловой коэффициент k равен угловому коэффициенту касательной CE, т. е. $k=p/y_0$. Поэтому свободный член h равен $-p^2/2y_0$. Ордината y точки J пересечения прямых CF и GK равна px_0/y_0, а абсцисса x этой точки определяется соотношением

$$\frac{px_0}{y_0}=\frac{px}{y_0}-\frac{p^2}{2y_0}.$$

Это соотношение равносильно равенству $x_0=x-p/2$. Поэтому абсцисса x точки J равна $x_0+p/2$. Координаты вектора $\overrightarrow{EJ}$ равны

$$x-x_0=\frac{p}{2}, \qquad y-y_0=\frac{px_0}{y_0}-y_0=\frac{px_0-y_0^2}{y_0}=\frac{y_0^2}{2y_0}=-\frac{y_0}{2}.$$

Поэтому угловой коэффициент прямой EJ равен $\frac{-y_0}{2}:\frac{p}{2}=\frac{-y_0}{p}$. Так как этот угловой коэффициент совпадает с угловым коэффициентом прямой (12.5), прямая EJ является нормалью к параболе (5.4).

Соприкасающиеся окружности

В V книге «Конических сечений» и в последующих книгах Аполлоний рассматривает конические сечения только в прямоугольных координатах, осями абсцисс которых являются оси этих сечений. По-видимому, эти книги были написаны как продолжение четырех книг «Начал конических сечений» Евклида, а позже Аполлоний заменил в I—IV книгах прямой круговой конус наклонным, а прямоугольные координаты — косоугольными.

Во многих предложениях V книги важную роль играют отрезки p, равные половине прямой стороны конического сечения. Эти отрезки тесно связаны с понятием соприкасающейся окружности к коническому сечению, т. е. предельного положения окружности, проходящей через три близкие точки конического сечения, при стремлении второй и третьей из этих точек к первой. Соприкасающуюся окружность называют также «кругом кривизны» конического сечения, а центр и радиус этой окружности называют «центром кривизны» и «радиусом кривизны» конического сечения в данной его точке.

Величина, обратная радиусу кривизны, называется «кривизной конического сечения» в данной точке. В современной дифференциальной геометрии кривизна кривой в данной ее точке определяется как предел отношения угла между касательными в этой точке и в точке, близкой к ней, к длине дуги кривой между этими точками при стремлении второй точки к первой.

Радиус кривизны конического сечения (5.12) в его вершине O, являющейся началом системы прямоугольных координат, равен параметру p этого конического сечения. В самом деле, рассмотрим близкие к вершине O точки M и N конического сечения с абсциссой h (рис. 73, *а*). Тогда, если радиус окружности MON равен r_h,

$$r_h^2=(r_h-h)^2+y^2=r_h^2-2r_hh+h^2+2ph+(e^2-1)h^2,$$

$$r_h=p+\frac{e^2h}{2}.$$

При стремлении точек M и N к O, т. е. при стремлении h к нулю, мы получим в пределе $r=\lim\limits_{h\to 0} r_h=p$.

На рис. 73, *б—г* изображены круги кривизны параболы, гиперболы и эллипса в их вершинах. Заметим, что центр кривизны конического сечения в его вершине расположен на оси сечения по ту же сторону, что и фокус, ближайший к этой вершине. В случае эллипса из формулы (5.10) следует, что радиус кривизны эллипса в его вершине равен $p=a(1-e^2)$, где e — эксцентриситет эллипса. В предложении III_{45} доказано, что расстояние f от вершины эллипса до ближайшего к ней

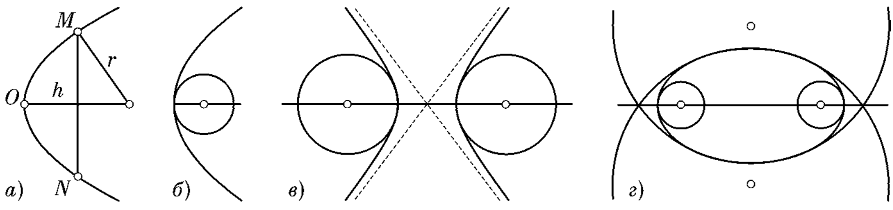


Рис. 73

фокуса равно $f=a(1-e)$. Поэтому величины p и f связаны соотношением

$$f=\frac{p}{e+1}. \qquad (12.8)$$

В случае гиперболы из формулы (5.11) следует, что радиус кривизны гиперболы в ее вершине равен $p=a(e^2-1)$, где e — эксцентриситет гиперболы. В предложении III_{45} доказано, что расстояние f от вершины гиперболы до ближайшего к ней фокуса равно $f=a(e-1)$. Поэтому в случае гиперболы величины p и f связаны тем же соотношением (12.8).

Соотношение (12.8) имеет место также в случае окружности, фокусы которой совпадают с ее центром и для которой $e=0$ и $f=p$, и в случае параболы, для которой $e=1$ и $f=p/2$.

Нормали к коническим сечениям как минимумы и максимумы

Во многих предложениях V книги Аполлоний находит нормали к коническим сечениям, проведенные из различных точек плоскости. Аполлоний определяет прямолинейные отрезки минимальной или максимальной длины, соединяющие данную точку плоскости с коническим сечением, и доказывает, что эти отрезки перпендикулярны касательным к коническому сечению в точках их встречи с сечением, т. е. эти отрезки направлены по нормалям к коническому сечению.

Необходимым условием того, что функция $f(x)$ обладает в точке $x=x_0$ экстремумом, т. е. максимумом или минимумом, является то, что в этой точке производная $f'(x)$ равна 0. Необходимым условием того, что функция $F(x, y)$ обладает экстремумом в точке с координатами $x=x_0$, $y=y_0$, состоит в том, что в этой точке равны нулю частные производные F'_x и F'_y.

Задачи V книги «Конических сечений» сводятся к проблеме условного экстремума, т. е. экстремума функции $f(x, y)$ при условии, что x и y связаны равенством $F(x, y)=0$. В случае задач Аполлония функция $f(x, y)$ является квадратом расстояния от точки M плоскости до точки P конического сечения, а равенство $F(x, y)=0$ является уравнением конического сечения. Если координаты точки P равны x, y, а координаты точки M равны x_0, y_0, функция $f(x, y)$ имеет вид

$$f(x, y)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2. \qquad (12.9)$$

Как показал Жозеф Луи Лагранж (1736—1813), необходимым условием экстремума функции $f(x, y)$, аргументы которой x, y связаны соотношением $F(x, y)=0$, является равенство нулю частных производных U'_x и U'_y функции

$$U(x, y)=f(x, y)+\lambda F(x, y), \qquad (12.10)$$

где λ — множитель Лагранжа.

Подставляя в выражение (12.10) значение (12.9) функции $f(x, y)$, мы найдем, что необходимыми условиями экстремума расстояния от точки M до точки P конического сечения являются равенства

$$U'_x = 2(x-x_0)+\lambda F'_x = 0, \qquad U'_y = 2(y-y_0)+\lambda F'_y = 0. \tag{12.11}$$

Формулы (12.11) показывают, что вектор $\overrightarrow{MP}$ в случае, когда он имеет экстремальную длину, направлен по нормали к коническому сечению.

Доказательства Аполлония того, что нормали имеют экстремальную длину, по существу равносильны доказательствам того, что частные производные многочлена второй степени с переменными x и y равны нулю.

Проведение нормалей к коническим сечениям из точек их осей

В предложении V_4 рассматривается парабола (5.4) и доказывается следующее: «Если на оси параболы отмечена точка, расстояние от которой до вершины сечения равно половине прямой стороны, и из этой точки проведены линии к сечению, то минимальная из них — линия, проведенная к вершине сечения, и те из них, которые ближе к ней, меньше тех, которые дальше от нее. Квадраты этих линий превышают квадрат линии, проведенной к вершине, на квадрат того, что отсечено на оси от вершины перпендикулярами, опущенными на ось из точек параболы, являющихся концами этих линий.

Пусть CE — ось параболы, а CG — половина прямой стороны, и пусть из точки G проведены к параболе ABC линии GH, GF, GB и GA (рис. 74, *а*). Я утверждаю, что наименьшая из линий, проведенных из точки G к сечению ABC, — линия CG, и те линии, которые ближе к ней, меньше тех, которые дальше от нее, и что квадрат каждой из них равен сумме [квадрата] „над CG“ и квадрата линии между точкой C и основанием перпендикуляра, опущенного [на ось] из конца этой линии» [26, с. 8—9].

Последнее утверждение теоремы является следствием уравнения (5.4) параболы.

В предложениях V_5 и V_6 доказываются аналогичные утверждения для гиперболы (5.6) и эллипса (5.5) (рис. 74, *б*, *в*) [26, с. 10—13, 18—19]. В этих предложениях избытки квадратов линий, проведенных из точки G к точкам гиперболы или эллипса, над квадратом линии, соединяющей точку G с вершиной сечения, выражаются с помощью соотношений, равносильных уравнениям гиперболы (5.6) и эллипса (5.5).

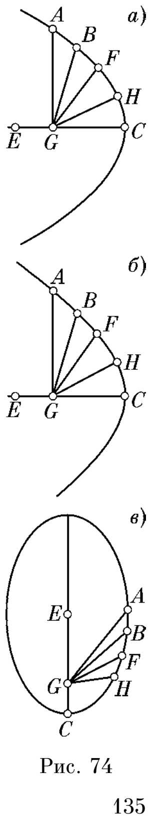


Рис. 74

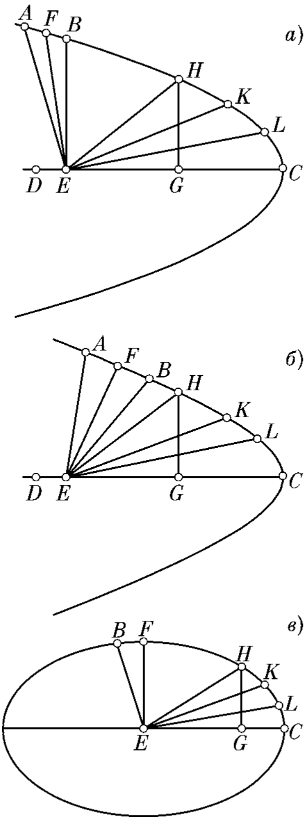


Рис. 75

В предложениях V_4, V_5 и V_6 разность квадрата отрезка, соединяющего точку G с точкой конического сечения, имеющей абсциссу x_0, и квадрата отрезка CG равна $x_0^2 e^2$, где e — эксцентриситет конического сечения.

В предложении V_7 рассматривается коническое сечение $ABCD$ с осью DH. На оси находятся такая точка E, что $DE = p$ и точка G между точками D и E. Аполлоний доказывает, что DG — минимальная линия, проведенная из точки G к коническому сечению.

Предложение является следствием предложений V_4, V_5 и V_6.

В предложении V_8 доказывается: «Если на оси параболы отмечена точка, расстояние от которой до вершины сечения больше половины прямой стороны, и если на оси от отмеченной точки по направлению к вершине отложена линия равная половине прямой стороны, и в [другом] конце отложенной линии восставлен перпендикуляр к оси, продолженный до сечения, и из точки, где он встречается с сечением, проведена линия к отмеченной точке, то эта линия — кратчайшая из линий, проведенных из точки, отмеченной на оси, к сечению, и из всех других линий по обе стороны [от нее] те, которые ближе к ней, короче тех, которые дальше [от нее]. Квадрат каждой из них превышает квадрат над кратчайшей линией на величину, равную квадрату линии между основанием перпендикуляра [к оси] и [отмеченной] точкой.

Пусть парабола — ABC, ее ось — CD. Пусть линия CE длиннее половины прямой стороны, а половина прямой стороны — GE. Восставим перпендикуляр GH к CE и соединим точки E и H (рис. 75, *а*). Я утверждаю, что линия EH — кратчайшая из линий, проведенных из точки E к сечению, а из других линий, проведенных от [сечения] ABC [к точке E], те, которые ближе к линии EH, короче тех, которые дальше [от нее] по обе стороны [от EH]. Если мы проведем от точки E к сечению линии EK, EL, EF, EA, я утверждаю также, что квадрат над каждой из них превышает квадрат над EH на величину равную квадрату над линией между основанием перпендикуляра, [опущенного на ось] из этой точки [K, L, F, A], и точкой G» [26, с. 26—27].

Отрезок оси параболы между точкой, из которой проведена нормаль, и основанием перпендикуляра, опущенного на ось из другого конца нормали, называется «поднормалью» точки параболы. Последнее утверждение предложения V_8 состоит в том, что поднормали всех точек параболы равны p.

В предложениях V_9 и V_{10} доказываются аналогичные утверждения для гиперболы и эллипса (рис. 75, *б*, *в*) [26, с. 30—34, 38—39]. Для точек гиперболы и эллипса, так же как для точек параболы, определяются поднормали. Эти поднормали для точек гиперболы (6.18) и эллипса (6.16) с абсциссами x_0 равны b^2x_0/a^2.

В предложениях V_8, V_9 и V_{10} разность квадрата отрезка, соединяющего точку E с точкой конического сечения, имеющей абсциссу x_0, и квадрата минимального отрезка, соединяющего точку E с точкой конического сечения, имеющей абсциссу x_1, равна $(x_1-x_0)^2e^2$, где e — эксцентриситет конического сечения.

Предложение V_{11} является частным случаем предложения V_{10}, когда отмеченная точка оси — центр эллипса. В этом случае нормалями являются обе оси эллипса, поднормаль равна нулю, минимальное расстояние от центра до эллипса равно его малой полуоси b, максимальное расстояние равно его большой полуоси a.

В предложении V_{12} рассматривается коническое сечение AB с осью BC, причем CA — минимальная из линий, проведенная из точки C к коническому сечению, и доказывается, что если D — точка отрезка CA, то DA — минимальная из линий, проведенных из D к коническому сечению.

В предложениях V_{13} и V_{14} доказываются теоремы об углах, образуемых минимальными линиями, проведенными к коническим сечениям из точек их осей, с этими осями.

В предложениях V_{15}—V_{23} доказываются теоремы о максимальных линиях, проведенных к эллипсу из различных точек его малой оси или ее продолжений. В частности, в предложении V_{20} доказывается, что если отмеченная точка находится между центром эллипса и той точкой малой оси или ее продолжения, расстояние от которой до одного из концов малой оси равно половине прямой стороны, соответствующей малой оси, то из этой точки можно провести к эллипсу три нормали: одну — направленную по малой оси и две — по обе стороны от нее, а если отмеченная точка находится по другую сторону от указанной точки, чем центр, то из нее, как и из самой, указанной точки, можно провести к эллипсу только одну нормаль, направленную по малой оси. Указанная точка является центром кривизны одной из вершин эллипса. В случае, когда из отмеченной точки можно провести три нормали, те, которые не неправлены по малой оси, являются максимальными линиями, а третья нормаль — минимальная линия, проведенная к дуге между концами первых двух нормалей. В случае, когда из отмеченной точки можно провести только одну нормаль, она является максимальной линией, проведенной к противоположной стороне эллипса. Если ордината отмеченной точки y_0, то поднормаль, являющаяся отрезком между этой точкой и основанием перпендикуляра, опущенного на малую ось из конца нормали, проведенной из отмеченной точки, равна a^2y_0/b^2.

В предложениях V_{24}—V_{26} доказывается, что к данной точке конического сечения можно провести только одну минимальную линию из точек оси этого сечения.

В предложениях V_{27}—V_{29} доказывается, что минимальные линии, проведенные к коническому сечению из точек плоскости, перпендикулярны касательным. По аналогии с поднормалями конических сечений можно определить «подкасательные» — отрезки оси конического сечения между точками ее пересечения с касательными и основаниями перпендикуляров, опущенных из точек касания на ось. В предложении V_{27} Аполлоний доказывает это утверждение для параболы (5.4). В этом случае в силу предложения V_8 поднормаль любой точки равна p, а в силу предложения I_{33} подкасательная точки с координатами x_0, y_0 равна $2x_0$. Поэтому произведение этих отрезков $2px_0$ в силу уравнения (5.4) равно квадрату y_0^2 ординаты точки касания, откуда следует, что отрезок оси параболы, состоящий из подкасательной и поднормали, является диаметром окружности, проходящей через точку касания, и угол между касательной и минимальной линией вписан в окружность и опирается на ее диаметр, т. е. является прямым углом.

В предложении V_{28} Аполлоний доказывает аналогичное утверждение для эллипса (6.16) и гиперболы (6.18). В этом случае в силу предложений V_9 и V_{10} поднормаль точки с координатами x_0, y_0 равна $b^2|x_0|/a^2$, а в силу предложения I_{37} подкасательная той же точки эллипса или гиперболы равна $|a^2/x_0-x_0|=|a^2-x_0^2|/|x_0|$. Поэтому произведение этих отрезков $b^2|a^2-x_0^2|/a^2$ в силу уравнений (6.16) и (6.18) равно квадрату y_0^2 ординаты точки касания, откуда следует, что отрезок оси сечения, состоящий из подкасательной и поднормали, является диаметром окружности, проходящей через точку касания, и угол между касательной и минимальной линией вписан в окружность и опирается на ее диаметр, т. е. является прямым углом.

В предложении V_{29} дается другое доказательство тех же утверждений, общее для всех трех конических сечений.

Предложение V_{30} является аналогом предложения V_{28} для максимальных линий, проведенных в эллипсе.

В предложениях V_{31}—V_{34} доказываются обратные теоремы для предложений V_{27}—V_{30}.

В предложениях V_{35}—V_{48} доказываются теоремы о пересечении нормалей к коническим сечениям.

Проведение нормалей к коническим сечениям из любой точки плоскости

В предложениях V_{49} и V_{50} доказывается, что если восставить к оси параболы (5.4) и гиперболы (6.18) или к большой оси эллипса (6.16) перпендикуляр, расстояние от которого до вершины сечения меньше или равно половине прямой стороны, то ни из какой точки этого перпендикуляра нельзя провести к противоположной стороне сечения такую прямую, отрезок которой между осью и сечением является минимальной линией, т. е. ни из какой точки этого перпендикуляра нельзя провести нормаль к противоположной стороне сечения.

В предложениях V_{51} и V_{52} решается задача проведения нормалей к параболе (5.4), эллипсу (6.16) и гиперболе (6.18) из любой точки плоскости.

Утверждения предложений V_{51} и V_{52} формулируются следующим образом.

«Если перпендикуляр, упомянутый [в предыдущих предложениях], отсекает на оси сечения [от его вершины] отрезок, больший половины прямой стороны, то я утверждаю, что можно найти такую линию, что если она меньше перпендикуляра, опущенного на ось, то из его конца нельзя провести к сечению прямую, отрезок которой, отсекаемый [осью], является минимальной линией, но минимальная линия, выходящая из конца всякой линии, проведенной из конца перпендикуляра к сечению, отсекает на оси от вершины сечения отрезок, больший отрезка, отсекаемого самой линией;

если перпендикуляр равен найденной линии, то из его конца можно провести только одну такую линию, отрезок которой, отсекаемый [осью], является минимальной линией, и минимальные линии, выходящие из концов других линий, проведенных из конца перпендикуляра, отсекают на оси от вершины сечения отрезки, большие отрезков, отсекаемых самими этими линиями;

если перпендикуляр меньше найденной линии, то из его конца можно провести только две такие линии, отрезки которых, отсекаемые [осью], являются минимальными линиями, и минимальные линии, выходящие из концов других линий, проведенных из конца перпендикуляра между двумя перпендикулярными линиями, отсекают на оси от вершины сечения отрезки, меньшие отрезков, отсекаемых самими этими линиями, а минимальные прямые, выходящие из концов других линий, проведенных из конца перпендикуляра не между двумя минимальными линиями, отсекают на оси от вершины сечения отрезки, большие отрезков, отсекаемых самими этими линиями.

Однако в случае эллипса для выполнения наших утверждений требуется, чтобы ось, на которую опущен перпендикуляр, была большой осью [эллипса]» [26, с. 144—147].

В предложении V_{51} рассматривается проведение нормалей к параболе, в предложении V_{52} — к гиперболе и эллипсу. В случае параболы линию, с которой сравниваются перпендикуляры, опущенные на ось, Аполлоний называет «линией K», в случае гиперболы и эллипса он называет эту линию «линией L».

Во всех трех случаях Аполлоний рассматривает коническое сечение AB с осью AG, из точки P с координатами x_0, y_0, расположенной ниже оси, опускает перпендикуляр PG на ось, причем $AG > p$, определяет линии K и L, соответствующие точке P, и доказывает, что

в случае, когда y_0 больше K или L, из точки P нельзя провести ни одной нормали к верхней части сечения;

в случае, когда ордината y_0 равна K или L, из точки P можно провести только одну нормаль к верхней части сечения;

в случае, когда y_0 меньше K или L, из точки P можно провести только две нормали к верхней части сечения.

В случае параболы (5.4) (рис. 76, *а*) Аполлоний определяет линию K следующим образом. На оси параболы между точками A и G Аполлоний находит такую точку H, для которой $HG = p$, а на отрезке AH находит такую точку F, что $FH = 2AF$. В точке F Аполлоний восставляет перпендикуляр FB, встречающий сечение в точке B. Линия K определяется пропорцией

$$\frac{\mathrm{K}}{BF} = \frac{FH}{HG}. \tag{12.12}$$

В случае эллипса (6.16) (рис. 76, *в*) и гиперболы (6.18) (рис. 76, *б*) Аполлоний определяет линию L следующим образом. Если центром сечения является точка D, то на оси сечения между точками A и G Аполлоний находит такую точку H, для которой

$$\frac{DH}{HG} = \frac{a}{p} = \frac{a^2}{b^2}. \tag{12.13}$$

На оси сечения между точками A и H Аполлоний находит такие точки K и F, для которых выполняются равенства

$$\frac{DA}{DK} = \frac{DK}{DF} = \frac{DF}{DH}. \tag{12.14}$$

Равенства (12.14) являются частным случаем равенств (2.2), и две средние пропорциональные линии DK и DF между данными линиями DA и DH можно найти, как и решение задачи об удвоении куба, с помощью пересечения двух парабол.

В точке K Аполлоний восставляет перпендикуляр к AB, встречающий сечение в точке B. Линия L определяется составным отношением

$$\frac{\mathrm{L}}{KB} = \frac{DG}{GH} \cdot \frac{HK}{DK}. \tag{12.15}$$

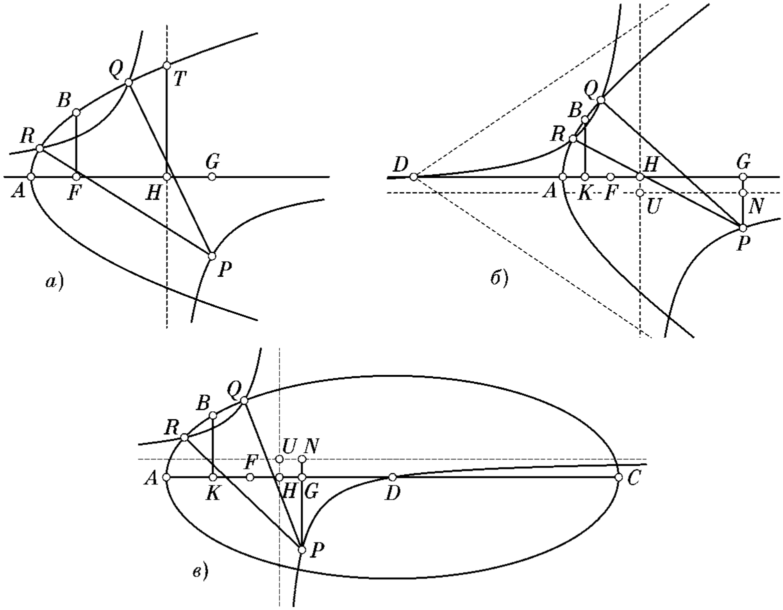


Рис. 76

Формулы (12.12) и (12.15) выражают алгебраические соотношения между линиями K и L и абсциссой x_0 точки P.

Аполлоний не указывает, каким путем он пришел к этим пропорциям.

Соотношения (12.12) и (12.15) можно выразить в явном виде следующим образом. В случае параболы (5.4) $AG=x_0$, $HG=p$, $AH=x_0-p$, $AF=\frac{1}{3}(x_0-p)$, $FH=\frac{2}{3}(x_0-p)$, $FB^2=\frac{4}{3}p(x_0-p)$. Поэтому пропорция (12.12) равносильна соотношению

$$\mathrm{K}^2=\frac{8}{27}\cdot\frac{(x_0-p)^3}{p} \tag{12.16}$$

В случае эллипса (6.16) и гиперболы (6.18) линия DA равна половине a поперечного диаметра, и если мы обозначим линию DH буквой h, то из равенств (12.14) следует, что $DK/a=\sqrt[3]{h/a}$ и

$$DK=a\sqrt[3]{h/a}. \tag{12.17}$$

Формулу (12.13) в случае эллипса можно переписать в виде $\frac{h}{h-x_0}=\frac{a^2}{b^2}$, откуда следует, что

$$h=\frac{a^2x_0}{a^2-b^2}. \tag{12.18}$$

Формулу (12.13) в случае гиперболы можно переписать в виде $\frac{h}{x_0-h}=\frac{a^2}{b^2}$, откуда следует, что

$$h=\frac{a^2x_0}{a^2+b^2}. \tag{12.19}$$

Из формулы (12.17) в случае эллипса (6.16) следует, что

$$BK^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-DK^2)=b^2\left(1-\left(\frac{h}{a}\right)^{2/3}\right). \tag{12.20}$$

Из формулы (12.17) в случае гиперболы (6.18) следует, что

$$BK^2=\frac{b^2}{a^2}(DK^2-a^2)=b^2\left(\left(\frac{h}{a}\right)^{2/3}-1\right). \tag{12.21}$$

Поэтому соотношение (12.15) для эллипса равносильно соотношению

$$\mathrm{L}^2=b^2\left(1-\left(\frac{h}{a}\right)^{2/3}\right)\frac{a^4x_0^2}{b^4h^2}\left(\frac{h}{a}\sqrt[3]{\frac{h}{a}}-1\right)^2$$

или

$$(b\mathrm{L})^2=(ax_0)^2\left(1-\left(\frac{h}{a}\right)^{2/3}\right)\left(\left(\frac{a}{h}\right)^{1/3}-\frac{a}{h}\right)^2=(ax_0)^2\left(1-\left(\frac{h}{a}\right)^{2/3}\right)\times$$
$$\times\left(\left(\frac{a}{h}\right)^{2/3}-2\left(\frac{a}{h}\right)^{4/3}+\left(\frac{a}{h}\right)^2\right)=(ax_0)^2\left(\left(\frac{a}{h}\right)^2-3\left(\frac{a}{h}\right)^{4/3}+3\left(\frac{a}{h}\right)^{2/3}-1\right),$$

т. е.

$$(b\mathrm{L})^2=(ax_0)^2\left(\left(\frac{a}{h}\right)^{2/3}-1\right)^3. \tag{12.22}$$

Аналогично доказывается, что соотношение (12.15) для гиперболы равносильно соотношению

$$(b\mathrm{L})^2=(ax_0)^2\left(1-\left(\frac{a}{h}\right)^{2/3}\right)^3. \tag{12.23}$$

Вспомогательные гиперболы

Для определения точек Q и R параболы (5.4), эллипса (6.16) и гиперболы (6.18) (рис. 76, *а—в*), являющихся концами нормалей, проведенных из точки P, Аполлоний определяет вспомогательные равносторонние гиперболы, пересекающие эти конические сечения в точках Q и R.

В случае параболы (5.4) асимптотами этой гиперболы является ось параболы и перпендикулярная ей прямая, пересекающая ось в точке H с абсциссой $x-p$.

В случае эллипса (6.16) и гиперболы (6.18) асимптотами вспомогательных гипербол являются прямые, параллельные оси гиперболы и большой оси эллипса, пересекающие прямую PG в точке N, удовлетворяющей условию

$$PN/NG=a/p=a^2/b^2, \tag{12.24}$$

и прямая, перпендикулярная оси, пересекающая ее в точке H, удовлетворяющей условию (12.13).

Асимптота вспомогательной гиперболы для эллипса (6.16), параллельная его большой оси, расположена выше этой оси, асимптота вспомогательной оси гиперболы для гиперболы (6.18), параллельная ее оси, расположена ниже этой оси.

Другая ветвь вспомогательной гиперболы проходит через точку P.

Хотя Аполлоний определяет вспомогательную гиперболу только в тех случаях, когда она пересекается с рассматриваемым коническим сечением в двух точках, вспомогательную гиперболу можно определить и в тех случаях, когда она касается этого сечения или не имеет с ним общих точек.

В том случае, когда вспомогательная гипербола и сечение касаются в точке B, прямая PB — единственная нормаль к верхней части сечения, проведенная из точки P. Так как касание вспомогательной гиперболы с сечением может быть получено предельным переходом из их пересечения в двух точках при стремлении точек Q и R к точке B, нормаль PB можно получить предельным переходом из бесконечно близких к ней нормалей, проведенных из точки P. Поэтому отрезок PB является радиусом кривизны сечения в точке B, а точка P — центр кривизны сечения в точке B.

В том случае, когда вспомогательная гипербола и сечение не имеют общих точек, из точки P нельзя провести нормали к верхней части сечения.

Вспомогательная гипербола, с помощью которой Аполлоний проводил нормали к параболе из точки P с координатами x_0, y_0, определяется уравнением

$$(x-x_0)y+p(y-y_0)=0. \tag{12.25}$$

Координаты x_0, y_0 точки P удовлетворяют этому уравнению. Так как асимптота $y=0$ гиперболы (12.25) совпадает с осью параболы, эта гипербола проходит через бесконечно удаленную точку параболы, которую, как точку пересечения всех диаметров параболы, можно рассматривать как центр параболы.

Это уравнение можно вывести из равенств (12.11) следующим образом. Здесь $F(x, y)=y^2-2px$. Поэтому

$$U'_x=2(x-x_0)-2\lambda p, \qquad U'_y=2(y-y_0)+2\lambda y.$$

Из второго равенства находим $\lambda = -(y_0 - y)/y$. Подставляя это значение λ в первое равенство, получаем уравнение (12.25).

Папп в предложении IV_{30} «Математического собрания» рекомендовал дать другое доказательство предложения V_{51} «Конических сечений» Аполлония, в котором вспомогательная гипербола (12.25) была заменена окружностью круга, так как окружность — плоское геометрическое место, а гипербола — более сложное телесное геометрическое место. Эта задача была решена Христианом Гюйгенсом (1629—1695). Текст Гюйгенса и его английский перевод были опубликованы Тумером [26, с. 659—661].

Омар Хайям (1048—1131) в своем алгебраическом трактате доказал, что пересечения окружности кругов, парабол с горизонтальными или вертикальными осями и равносторонних гипербол с горизонтальными и вертикальными осями или асимптотами могут быть применены для решения кубических уравнений.

Таким образом, пересечение параболы с равносторонней гиперболой у Аполлония и пересечение параболы с окружностью у Гюйгенса определяют решения кубических уравнений.

Вспомогательные гиперболы, с помощью которых Аполлоний проводил нормали к эллипсу и гиперболе из точки P с координатами x_0, y_0, определяются в случае эллипса (6.16) уравнением

$$xy - \frac{xy_0 b^2}{a^2+b^2} - \frac{yx_0 a^2}{a^2+b^2} = 0, \qquad (12.26)$$

а в случае гиперболы (6.18) уравнением

$$xy - \frac{xy_0 b^2}{a^2-b^2} + \frac{yx_0 a^2}{a^2-b^2} = 0. \qquad (12.27)$$

Координаты x_0, y_0 точки P удовлетворяют обоим уравнениям (12.26) и (12.27). Так как в обоих этих уравнениях отсутствуют свободные члены, гипербола (12.26) проходит через центр эллипса (6.16), а гипербола (12.27) проходит через центр гиперболы (6.18).

Уравнения (12.26) и (12.27) можно вывести из равенств (12.11), если принять для эллипса $F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$, для гиперболы $F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$. Поэтому в случае эллипса

$$U'_x = 2(x - x_0) + 2\frac{\lambda x}{a^2}, \qquad U'_y = 2(y - y_0) + 2\frac{\lambda y}{b^2},$$

а в случае гиперболы

$$U'_x = 2(x - x_0) + 2\frac{\lambda x}{a^2}, \qquad U'_y = 2(y - y_0) - 2\frac{\lambda y}{b^2}.$$

Исключая из этих пар уравнений λ, мы получаем в первом случае уравнение (2.26), а во втором случае — уравнение (2.27).

В силу симметрии параболы, эллипса и гиперболы относительно их осей проведение нормалей к нижней части этих сечений из точки P, расположенной выше оси, аналогично проведению нормалей в предложениях V_{51} и V_{52}.

Проведение нормалей к коническим сечениям из точек, находящихся на их осях, производится с помощью пар перпендикулярных прямых, которые можно рассматривать как вырожденные случаи вспомогательных гипербол. Одной из этих прямых является сама ось сечения, а другой — прямая, соединяющая концы нормалей, расположенных симметрично относительно оси.

В случае проведения нормали из центра кривизны сечения в его вершине второй из двух перпендикулярных прямых является касательная в этой вершине.

В предложении V_{60} Аполлоний рассматривает проведение нормали к гиперболе из точки ее мнимой оси с помощью двух перпендикулярных прямых, одной из которых является мнимая ось гиперболы. Эту пару прямых также можно рассматривать как вырожденный случай вспомогательной гиперболы.

В том случае, когда из данной точки проведены к коническому сечению две нормали, и из этой точки нельзя провести к сечению ни одной нормали между проведенными, то из отрезков этих нормалей между их общей точкой и сечением один является минимальной, а другой — максимальной линией.

В предложении V_{72} Аполлоний доказывает, что если из данной точки, находящейся ниже оси параболы или гиперболы, можно провести к верхней части сечения две нормали, то отрезок той из этих нормалей между их общей точкой и сечением, который ближе к вершине сечения, является максимальной линией, а отрезок другой нормали является минимальной линией.

В предложении V_{74} Аполлоний доказывает, что если из данной точки, находящейся ниже большой оси эллипса, но не на его малой оси, можно провести к верхней части эллипса две нормали, то отрезок той из этих нормалей между их общей точкой и сечением, который пересекается с малой осью, является максимальной линией, а отрезок другой нормали является минимальной линией.

Эволюты конических сечений

Геометрические места центров кривизны плоских кривых в современной дифференциальной геометрии называются «эволютами» этих кривых.

Определение Аполлонием положений точек P в том случае, когда из них можно провести единственную нормаль PB к верхней части сечения, равносильно определению эволют конических сечений.

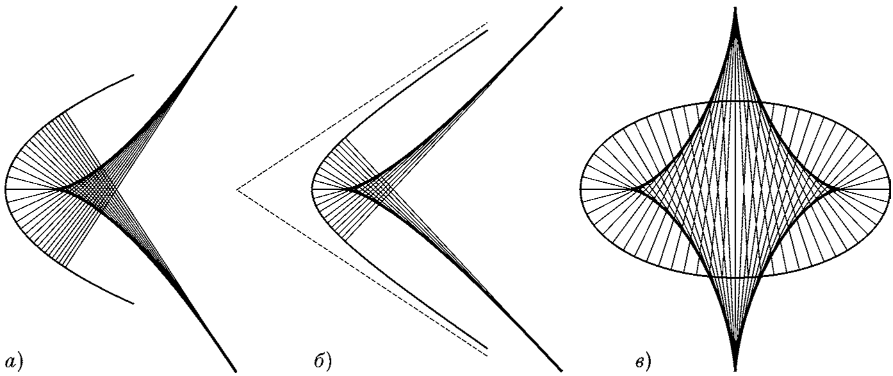


Рис. 77

Эволюты параболы, гиперболы и эллипса можно определить как огибающие семейств нормалей к этим коническим сечениям, т. е. как такие линии, которые в каждой своей точке касаются нормали, проведенной в некоторой точке конического сечения (рис. 77, *а—в*).

Семейство линий, зависящих от одного параметра t, можно определить уравнением

$$F(x, y, t)=0. \tag{12.28}$$

Огибающую этого семейства можно получить, исключая параметр t из уравнения (12.28) и из уравнения

$$F'_t(x, y, t)=0, \tag{12.29}$$

левая часть которого является частной производной функции $F(x, y, t)$ по параметру t.

Для определения эволюты параболы (5.4) запишем параметрическое уравнение этой параболы в виде

$$x=t^2/2p, \qquad y=t.$$

Тогда уравнение (12.5) семейства нормалей к этой параболе можно переписать в виде

$$F(x, y, t)=t\left(x-\frac{t^2}{2p}\right)+p(y-t)=0,$$

а уравнение (12.29) принимает вид

$$x-p-\frac{3t^2}{2p}=0.$$

Исключая t из последних двух уравнений, мы получим уравнение полукубической параболы (рис. 78, *а*)

$$y^{2/3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{x-p}{\sqrt[3]{p}}. \tag{12.30}$$

Для определения эволют эллипса (6.16) и гиперболы (6.18) запишем их параметрические уравнения в виде

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t \qquad \text{и} \qquad x=a\,\mathrm{ch}\,t,\quad y=b\,\mathrm{sh}\,t.$$

Тогда уравнения (12.6) и (12.7) семейств нормалей эллипса и гиперболы можно переписать в виде

$$F(x, y, t)=\frac{(x-a\cos t)\sin t}{b}-\frac{(y-b\sin t)\cos t}{a}$$

и

$$F(x, y, t)=\frac{(x-a\,\mathrm{ch}\,t)\,\mathrm{sh}\,t}{b}+\frac{(y-b\,\mathrm{sh}\,t)\,\mathrm{ch}\,t}{a}.$$

Исключая параметры t из этих двух уравнений и из соответственных уравнений (12.29), мы получим уравнение эволюты эллипса, называемой астроидой (рис. 78, *б*),

$$\left(\frac{xa}{a^2-b^2}\right)^{2/3}+\left(\frac{yb}{a^2-b^2}\right)^{2/3}=1 \tag{12.31}$$

и уравнение эволюты гиперболы, называемой псевдоастроидой (рис. 78, *в*),

$$\left(\frac{xa}{a^2+b^2}\right)^{2/3}-\left(\frac{yb}{a^2+b^2}\right)^{2/3}=1. \tag{12.32}$$

Полукубическая парабола является алгебраической кривой третьего порядка, астроида и псевдоастроида — алгебраические кривые шестого порядка. Все эти кривые обладают точками возврата. У полукубической параболы одна такая точка, совпадающая с центром кривизны параболы в ее вершине. У астроиды четыре таких точки, совпадающие с центрами кривизны эллипса в его вершинах. Псевдоастроида состоит из двух ветвей, каждая из которых является геометрическим местом центров кривизны одной из ветвей гиперболы, у псевдоастроиды две точки возврата — центры кривизны обеих ветвей гиперболы в их вершинах.

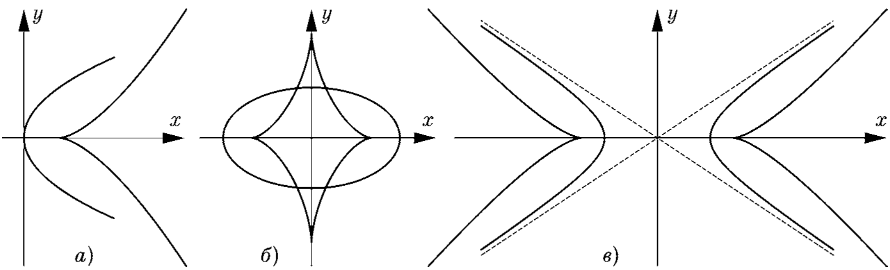


Рис. 78

Так как линии K и L, определенные Аполлонием в предложениях V_{51} и V_{52}, равны ординатам точек эволют параболы, эллипса и гиперболы, абсциссы которых равны x_0, соотношение (12.12) равносильно уравнению (12.30) полукубической параболы, соотношение (12.15) равносильно уравнениям (12.31) и (12.32) астроиды и псевдоастроиды.

Для доказательства равносильности соотношения (12.12) и уравнения (12.30) достаточно заменить в этом уравнении x на x_0 и y на K и возвести обе части этого уравнения в куб.

Для доказательства равносильности соотношения (12.15) и уравнений (12.31) и (12.32) следует переписать эти уравнения, соответственно, в виде

$$(by)^{2/3}=(a^2-b^2)^{2/3}-(ax)^{2/3}, \tag{12.33}$$

$$(by)^{2/3}=(ax)^{2/3}-(a^2+b^2)^{2/3}, \tag{12.34}$$

заменить в уравнениях (12.33) и (12.34) x на x_0 и y на L, выразить a^2-b^2 в случае эллипса и a^2+b^2 в случае гиперболы через a/h по формулам (12.18) и (12.19) и возвести обе части каждого из полученных уравнений в куб.

Равносильность соотношений (12.12), (12.15) и уравнений (12.30), (12.31) и (12.32) была установлена Т. Л. Хизсом [30, с. 174—178]. Однако, хотя книга [30] вышла в 1896 г., ни в одном издании «Конических сечений», опубликованных в XX в., не упоминалось, что соотношения (12.12) и (12.15) Аполлония равносильны уравнениям эволют параболы, эллипса и гиперболы.

Несмотря на то, что Аполлонию были известны «симптомы» эволют конических сечений, он не рассматривал строения этих кривых и, в частности, не писал об их точках возврата. По-видимому, это объясняется тем, что полукубическую параболу, астроиду и псевдоастроиду нельзя построить ни одним способом, которым в древности получали кривые — с помощью циркуля и линейки, пересечением поверхности плоскостью или механическим способом.

Профессор Киевского университета М. Е. Ващенко-Захарченко дал такую характеристику V книги «Конических сечений» Аполлония. «Книга V, самая замечательная, показывает исследования Аполлония во всем их величии; в этой книге впервые появляется вопрос о геометрическом значении наибольших и наименьших величин, т. е. вопрос о maximum'e и minimum'e. Он исследует отдельные случаи и с необыкновенным умением, почти совершенно непонятным для нас, из этих отдельных случаев выводит правила более общие, под которые он подводит все исследуемые им вопросы. С удивительным искусством он решает самые сложные вопросы, и нам невольно приходит на мысль, что он обладает иными методами исследования, при помощи которых он находил предложения, а уже впоследствии переделывал их на общепринятую форму. Известно, что почти два тысячелетия спустя

Ньютон многие из своих исследований переделывал и видоизменял, облекая их в формы и приемы, употребляемые древними греческими геометрами» [7, с. 103].

Особенно загадочно, каким образом Аполлоний пришел к соотношениям (12.12) и (12.15), равносильным уравнениям эволют конических сечений. По-видимому, Аполлоний действительно владел некоторыми элементами дифференциального исчисления и пришел к «симптомам» эволют конических сечений, определяя огибающие семейств нормалей параболы, эллипса и гиперболы.

С мнением Ващенко-Захарченко перекликаются следующие слова ван дер Вардена: «Аполлоний виртуозно владеет геометрической алгеброй, но не менее виртуозно умеет скрывать свой первоначальный ход мыслей. Из-за этого-то его книгу и трудно понимать; рассуждения его элегантны и кристально ясны, но что его привело именно к таким рассуждениям, а не к иным каким-нибудь, — об этом можно лишь догадываться» [6, с. 338—339].

Эти слова ван дер Вардена относятся не только к V книге, но и ко всем книгам «Конических сечений» Аполлония, в частности, к предложениям I_{11}—I_{13}, в которых Аполлоний находил «симптомы» параболы, гиперболы и эллипса, исходя из пропорций (6.2) и (6.5), определяющих «прямые стороны» этих конических сечений.

Несомненно, что Ж. Л. Лагранж, который сам называл свое дифференциальное исчисление «алгебраическим» и находился под очевидным влиянием Аполлония, не мог не читать латинский перевод «Конических сечений», появившийся в 1710 г. Лагранж создал свою теорию условного экстремума, отправляясь от результатов этой книги.

Глава 13

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Алгебраические уравнения и алгебраическая геометрия

Значение термина «алгебраическая геометрия» несколько раз менялось в ходе истории математики. В XIX в. под алгебраической геометрией понимали геометрию линий и поверхностей, определяемых алгебраическими уравнениями третьей степени и выше. Мы будем понимать этот термин более широко — как вопросы геометрии, связанные с алгебраическими уравнениями степени выше второй.

В главе 5 мы видели, что появление конических сечений было связано с решением задачи об удвоении куба, равносильной кубическому уравнению $x^3=2a^3$. В связи с решением других задач античные математики рассматривали различные алгебраические и трансцендентные кривые.

Динострату, брату Менехма, приписывается рассмотрение трансцендентной кривой, называемой «квадратрисой», определяемой уравнением

$$y=x \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2a},$$

с помощью которой он решал задачи квадратуры круга и деления угла на любое число равных частей.

Архимед в сочинении «О спиралях» изучал трансцендентную кривую — спираль, определяемую в полярных координатах уравнением $\rho=a\varphi$.

Старший современник Аполлония Никомед изучал алгебраическую кривую четвертого порядка — «конхоиду», определяемую уравнением

$$(x^2+y^2)(y-a)^2=k^2y^2.$$

Диокл в сочинении «О зажигательных зеркалах» определил алгебраическую кривую третьего порядка — «циссоиду»

$$y^2=\frac{x^3}{a-x}.$$

Аполлоний в «Конических сечениях» подошел к вопросам алгебраической геометрии в III и V книгах. Во введении к I книге он писал, что теоремы III книги позволяют полностью решить задачу о «геометрических местах к трем и четырем прямым». Заменяя в определении этих геометрических мест три и четыре прямые на $2k-1$ и $2k$ прямых, мы получим алгебраические кривые k-го порядка. В предложениях V_{51} и V_{52} Аполлоний определил точки алгебраических кривых шестого порядка (12.18), (12.19) и (12.20).

В главе 12 мы отмечали доказательство Омара Хайяма, что пересечение равносторонней гиперболы и параболы, ось которой совпадает с одной из асимптот гиперболы, которое Аполлоний применял в предложении V_{51}, равносильно решению алгебраического уравнения третьей степени.

Аналогичным образом Джемшид аль-Каши (ум. 1436) доказал, что пересечения равносторонней гиперболы с произвольной гиперболой и эллипсом, которые Аполлоний применял в предложении V_{52}, равносильно решению алгебраического уравнения четвертой степени.

Непосредственно с алгебраической геометрией было связано сочинение Аполлония «Вставки».

«Вставки» Архимеда

Сочинение Аполлония «Вставки» не сохранилось, но, согласно описанию Паппа, в нем излагалось решение многих геометрических задач с помощью «вставок».

Задачи такого типа встречались в сочинениях Архимеда. В «Леммах» [4, с. 395—396] с помощью вставки (*neusis*) решалась задача трисекции угла, т. е. деления угла на три равные части. Под вставкой здесь имелась в виду линейка с отмеченными на ней двумя точками. Для решения этой задачи Архимед описывал из центра O полуокружность ABC радиусом OA, равным расстоянию между отмеченными точками вставки (рис. 79, *а*). Архимед проводил радиус OB полукруга, составляющий с радиусом OA угол, который требовалось разделить на три равные части, диаметр AC продолжал в сторону точки C. Линейка с отмеченными точками накладывалась на чертеж таким образом, что определяемая ей прямая линия проходила бы через точку B, а отмеченные точки попадали на полуокружность в точке D и на продолжение диаметра в точке E. Архимед проводил радиус OD. Если угол CED равен α, то, так как треугольник ODE равнобедренный, угол EOD также равен α, а внешний угол ODB этого треугольника равен 2α. Так как треугольник ODB также равнобедренный, то угол OBD тоже равен 2α. Поэтому в треугольнике OBE угол OEB равен α, а угол OBE равен 2α. Данный угол AOB — внешний угол треугольника OBE, поэтому он равен 3α, и угол CED равен его трети.

В «Книге о построении круга, разделенного на семь равных частей» [4, с. 401—416] Архимед строил правильный семиугольник, вписанный в круг, с помощью другого вида вставки — прямой линии,

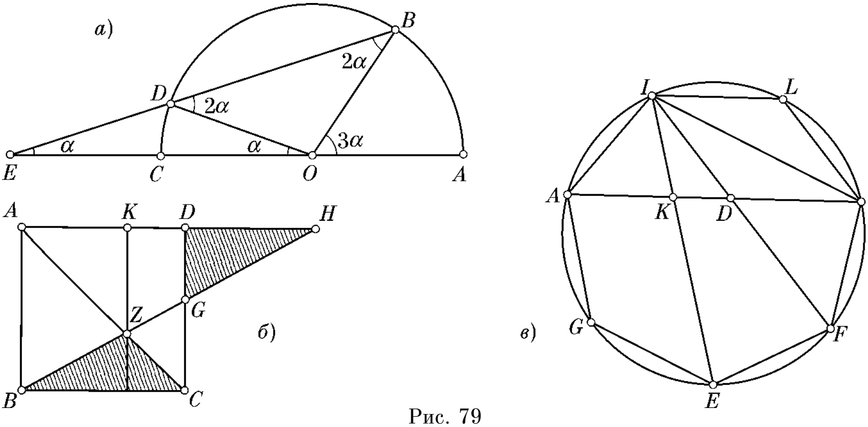


Рис. 79

способной уравновешивать плоские фигуры, находящиеся по обе стороны от нее, если считать, что веса плоских фигур пропорциональных их площадям. Архимед рассматривал квадрат $ABCD$ (рис. 79, *б*). На этот чертеж он накладывал вставку таким образом, что ее прямая линия проходила бы через вершину B квадрата, пересекала его диагональ AC в точке Z, его сторону CD в точке G и продолжение стороны AD в точке H так, чтобы треугольник BCZ уравновешивался треугольником DGH. Через точку Z Архимед проводил прямую параллельно сторонам AB и CD квадрата, пересекающую сторону AD в точке K.

Архимед доказывал, что если из точки K прямой AH провести линию KI, равную KA, и линию ID, равную DH, то угол KID будет равен $\pi/7$, и если провести окружность AIH, продолжить линии IK и ID до точек E и F окружности, то дуга EF будет равна седьмой части окружности, и семиугольник $IAGEFHL$ (рис. 79, *в*) будет правильным семиугольником, вписанным в окружность.

Обе задачи Архимеда равносильны кубическим уравнениям. Задача о трисекции угла равносильна уравнению

$$3x = 4x^3 + a. \tag{13.1}$$

Задача о построении правильного семиугольника равносильна уравнению

$$x^3 + x^2 = 2x + 1. \tag{13.2}$$

Уравнение (13.1) является следствием соотношения

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$$

Уравнение (13.2) можно получить следующим образом. Представим вершины правильного семиугольника комплексными числами 1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6, где z удовлетворяет условию $z^7 = 1$. Поэтому z удовлетворяет уравнениям

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

и

$$z^3+z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}=0.$$

Полагая в последнем уравнении $x=z+1/z$, мы получим уравнение (13.2).

«Вставки» Аполлония

В VII книге «Математического собрания» Папп писал о сочинении Аполлония «Вставки»: «Общая задача этого сочинения такова: если две линии заданы по положению, вставить между ними прямую данной длины, продолжение которой проходило бы через данную точку. Среди задач, относящихся к этой прямой, имеются задачи различного рода: одни из них — плоские, другие — телесные или линейные» [50, с. 501; 51, с. 112—113].

Из этих слов видно, что в этом сочинении рассматриваются вставки того же типа, что и в задаче Архимеда о трисекции угла. Под плоскими задачами здесь имеются в виду задачи, которые можно решить с помощью циркуля и линейки, т. е. задачи, сводящиеся к линейным и квадратным уравнениям. Под телесными задачами имеются в виду задачи, решаемые с помощью конических сечений, т. е. задачи, сводящиеся к алгебраическим уравнениям третьей и четвертой степени. Под линейными задачами имеются в виду задачи, решаемые с помощью линий, которые не являются ни прямыми, ни окружностями, ни коническими сечениями, т. е. с помощью алгебраических линий высших порядков или трансцендентных линий.

Папп привел следующие примеры задач сочинения «Вставки»: «Заданы по положению полуокружность и прямая под прямым углом к ее основанию или две полуокружности с основаниями на одной и той же прямой, вставить между этими двумя линиями прямую данной длины, продолжение которой проходит через конец основания полуокружности. Задана по положению окружность, вписать в нее прямую данной длины, продолжение которой проходит через данную точку» [50, с. 501—502; 51, с. 112—113].

«Отсечения» Аполлония

В сочинении Аполлония «Отсечение отношения» решаются задачи о таком пересечении двух прямых третьей, при котором на первых двух прямых отсекаются отрезки x и x', связанные условием $x'/x=k$, где k — постоянное отношение. К таким задачам относится предложение III_{41} «Конических сечений». В главе 8 мы показали, что в этих задачах при данном k отсекающие прямые являются касательными к некоторым коническим сечениям.

Согласно описанию Паппа, в сочинении Аполлония «Отсечение площади» решаются задачи о таком пересечении двух прямых третьей, при котором на первых двух прямых отсекаются отрезки x и x', являющиеся сторонами прямоугольника данной площади. Это условие можно записать в виде $xx'=k$, где k — постоянная площадь. К таким задачам относятся предложения III_{42} и III_{43} «Конических сечений». В главе 8 мы показали, что в таких задачах отсекающие прямые при данном k также являются касательными к коническим сечениям.

Задачу Архимеда о построении правильного семиугольника, при решении которой применялась вставка, уравновешивающая площади двух треугольников, можно рассматривать как задачу об отсечении площадей в отношении 1:1. Поэтому возможно, что в упоминаемом ибн ан-Надимом трактате Аполлония «Отсечение площадей в отношении» применялась такая же вставка, как в трактате Архимеда о правильном семиугольнике. Эти задачи равносильны кубическим уравнениям.

Так как трактат с таким названием не упоминается Паппом, по-видимому, он является частью «Отсечения площади».

К трактатам Аполлония об отсечении отношения и площади примыкает его сочинение «Определенное сечение». В этом трактате рассматривались задачи типа: на прямой заданы четыре точки A, B, C, D. Требуется найти такую точку P этой прямой, чтобы отношение $(AP\cdot CP):(BP\cdot DP)$ имело бы заданное значение или чтобы это отношение было бы максимальным или минимальным. Последняя задача равносильна определению экстремума функции, являющейся отношением двух многочленов второй степени.

Решение алгебраических уравнений с помощью конических сечений

Решение Менехма задачи об удвоении куба было еще в древности обобщено на задачу об определении двух средних пропорциональных x и y между двумя данными величинами a и b, которые удовлетворяют условию (2.2). Эта задача, равносильная кубическому уравнению $x^3=a^2b$, решалась с помощью пересечения двух парабол $x^2=ay$ и $y^2=bx$. Задача об удвоении куба является частным случаем этой задачи при $b=2a$.

Архимед в предложении II_4 сочинения «О шаре и цилиндре» поставил задачу, равносильную кубическому уравнению

$$x^3+aS=bx^2, \tag{13.3}$$

где a и b — данные отрезки, S — данная площадь. Архимед впоследствии решил эту задачу с помощью пересечения параболы и гиперболы.

Математики средневекового Востока решали многие задачи, равносильные кубическим уравнениям, с помощью пересечения конических сечений. Сабит ибн Корра решил задачу о трисекции угла с помощью пересечения окружности и равносторонней гиперболы.

Аль-Хазин (ум. ок. 970), не знавший о решении Архимеда задачи, сводящейся к уравнению (13.3), дал новое решение этой задачи с помощью пересечения конических сечений.

Ибн аль-Хайсам решил задачу о построении правильного семиугольника с помощью пересечения параболы и равносторонней гиперболы.

Омар Хайям в «Книге о доказательствах задач алгебры и алмукабалы» [23] дал полную классификацию кубических уравнений, имеющих положительные корни. Для каждого из 19 кубических уравнений этого типа, не сводящихся к линейным и квадратным уравнениям, Хайям указал решение с помощью пересечения окружностей, равносторонних гипербол с горизонтальными и вертикальными осями или асимптотами и парабол с горизонтальными или вертикальными осями.

Математики средневекового Востока применяли конические сечения для решения алгебраических уравнений четвертой степени. Аль-Кухи решал с помощью пересечения двух гипербол задачу о построении равностороннего пятиугольника, вписанного в квадрат, сводящуюся к уравнению $x^4+32a^4=4ax^3+52a^2x^2+16a^3x$.

Ибн аль-Хайсам в своей знаменитой «Книге оптики» находил точки сферических, цилиндрических и конических зеркал, в которых луч, выходящий из данной точки A, отражается в данную точку B. Эти задачи также равносильны уравнениям четвертой степени. Ибн аль-Хайсам решал их с помощью пересечения двух гипербол.

При решении уравнений четвертой степени применялись конические сечения более общего вида, чем при решении кубических уравнений.

Аль-Каши в своей книге «Ключ арифметики» сообщал, что написал книгу о классификации уравнений четвертой степени и для каждого уравнения указал способ его решения с помощью пересечения конических сечений общего вида. Эта книга аль-Каши до нас не дошла.

При доказательстве предложения V_{52} «Конических сечений» Аполлоний решал задачу об определении двух средних пропорциональных между двумя данными величинами, выражаемую пропорциями (2.2). Эта задача равносильна кубическому уравнению.

Выше мы упоминали, что задача проведения нормалей к параболе в предложении V_{51} равносильна кубическому уравнению, а задача проведения нормалей к эллипсу и гиперболе в предложении V_{52} равносильна уравнению четвертой степени.

«Общий трактат»

Математик V в. н. э. Марин в своих комментариях к геометрическому трактату Евклида «Данные» вместе со «Вставками» Аполлония упомянул сочинение Аполлония «Общий трактат» (*Katholouo pragmateia*) [25, т. 1, с. 68—70]. Название этого трактата показывает, что методы решения геометрических задач в этом трактате были более общими, чем во «Вставках».

Возможно, что в этом трактате Аполлоний описал, каким образом он пришел к пропорциям, из которых в предложениях I_{11}—I_{13} он вывел уравнения параболы, гиперболы и эллипса, и как он пришел к пропорциям, равносильным алгебраическим уравнениям эволют конических сечений, приведенным им в предложениях V_{52} и V_{53} «Конических сечений».

Глава 14

КОНТАКТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Контактные преобразования

Термин «контактная геометрия» применяется в нескольких значениях. Мы будем понимать под этим термином, как в работе [19], геометрию окружностей и сфер, основанную Софусом Ли (1842—1899) [49]. Ф. Клейн называл эту геометрию «высшей геометрией окружностей и сфер».

В отличие от аффинной, проективной и конформной геометрий, изучающих преобразования плоскостей, переводящие точки этих плоскостей в точки, а прямые в прямые или окружности в окружности, контактная геометрия изучает такие преобразования плоскости, при которых точки могут перейти в точки, окружности или прямые, окружности могут перейти в окружности, точки или прямые, а прямые — в прямые, окружности или точки, причем сохраняется касание окружностей и прямых и принадлежность точек прямым и окружностям. Такие преобразования называются «контактными преобразованиями». В контактной геометрии точки рассматриваются как окружности нулевого радиуса, а прямые — как окружности бесконечного радиуса, принадлежность точки прямой или окружности рассматривается как частный случай касания.

Софус Ли показал, что контактные преобразования плоскости образуют группу, зависящую от 10 параметров, изоморфную группе проективных преобразований четырехмерного пространства, переводящих в себя гиперповерхность второго порядка

$$X^2+Y^2+Z^2-U^2-V^2=0. \qquad (14.1)$$

Точки гиперповерхности (14.1) изображают окружности контактной геометрии. При этом окружности (8.29) ставится в соответствие точка гиперповерхности (14.1) с координатами

$$X=\frac{x_0^2+y_0^2-r^2-1}{2}, \quad Y=x_0, \quad Z=y_0, \quad U=\frac{x_0^2+y_0^2-r^2+1}{2}, \quad V=r. \qquad (14.2)$$

Точке с координатами x_0, y_0 ставится в соответствие точка гиперповерхности (14.1) с координатами (14.2) при $r=0$. Прямой $ux+$ $+vy+w=0$ ставится в соответствие точка гиперповерхности (14.1) с координатами

$$X=\frac{u^2+v^2-w^2-1}{2},\quad Y=u,\quad Z=v,\quad U=\frac{u^2+v^2-w^2+1}{2},\quad V=w. \quad (14.3)$$

При этом всякие две окружности контактной геометрии, касающиеся друг друга, изображаются двумя точками гиперповерхности, координаты которых удовлетворяют условию

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2-U_1U_2-V_1V_2=0. \quad (14.4)$$

Условие (14.4) означает, что эти две точки лежат на одной прямолинейной образующей гиперповерхности (14.1).

Подгруппа группы контактных преобразований, переводящая точки в точки, является группой круговых преобразований плоскости. Подгруппа группы контактных преобразований, переводящая прямые в прямые, называется группой преобразований Лагерра по имени Эдмонда Лагерра (1834—1886), впервые рассмотревшего эти преобразования в работе [48].

Сочинение Аполлония «Касания»

Согласно описанию Паппа, не дошедшее до нас сочинение Аполлония «Касания» состояло из двух книг. В этом сочинении решалась задача: провести окружность, касающуюся трех объектов, которые могут быть окружностями, прямыми и точками. Эта задача решалась: 1) для трех точек, 2) для двух точек и прямой, 3) для точки и двух прямых, 4) для трех прямых, 5) для двух точек и окружности, 6) для точки и двух окружностей, 7) для двух прямых и окружности, 8) для прямой и двух окружностей, 9) для точки, прямой и окружности, 10) для трех окружностей.

Во II книге решались задачи 7) и 10) и рассматривалось много частных случаев этих задач. Остальные восемь задач решались в I книге.

Все 10 задач этого сочинения Аполлония можно сформулировать единообразно: провести окружность, касающуюся трех окружностей контактной геометрии.

Многие задачи сочинения «Касания» сохранились в арабском переводе в книге Ибрахима ибн Синана «Избранные задачи». Некоторые из них переведены на английский язык (в статье [44]) и на русский язык (в статье [12]).

В переводе ибн Синана отсутствует изложение задачи 6), в которой требовалось провести окружность, касающуюся двух окружностей с центрами A и B и проходящую через точку C (рис. 80, a). По-видимому, Аполлоний решал эту задачу следующим образом. Он производил инверсию относительно какой-нибудь окружности с центром C. При этой инверсии точка C переходит в бесконечно удаленную точку, а окружности с центрами A и B — в окружности с центрами K и L. Далее проводилась прямая MN, касающаяся этих двух окружностей в точках M и N (рис. 80, *б*). Затем та же инверсия производилась еще раз. При этом бесконечно удаленная точка переходила в точку C, окружности с центрами K и L переходили в окружности с центрами A и B, прямая MN переходила в окружность CDE, касающуюся двух данных окружностей.

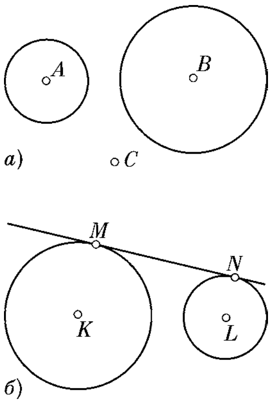


Рис. 80

Как видно из перевода ибн Синана, Аполлоний начал рассмотрение задачи 10) с того случая, когда три окружности с центрами A, B и C имеют один и тот же радиус r (рис. 81). Аполлоний проводил окружность ABC, и искомая окружность имела тот же центр, что окружность ABC, и радиус, меньший радиуса окружности ABC на величину r.

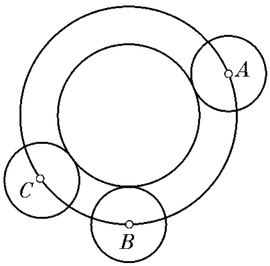


Рис. 81

Общий случай, когда окружности с центрами A, B и C имеют радиусы r_1, r_2 и r_3 (рис. 82), Аполлоний сводил к задаче 6) о проведении окружности, которая проходит через точку и касается двух окружностей. Для этого в случае, когда r_3 — наименьший из радиусов, Аполлоний строил окружности с центрами A и B и радиусами $r_1 - r_3$ и $r_2 - r_3$ и проводил через точку C окружность, касающуюся этих двух окружностей. Искомая окружность имеет тот же центр, что и окружность, проходящая через точку C, и радиус, меньший радиуса этой окружности на величину r_3.

Заметим, что Ф. Виет в своей реконструкции «Касаний» Аполлония также сводил задачу о проведении окружности, касающейся трех данных окружностей, к задаче о проведении через данную точку окружности, касающейся двух данных окружностей.

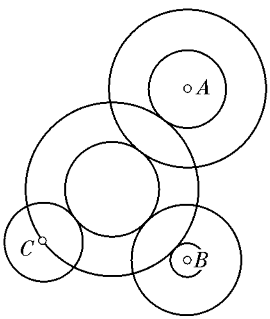


Рис. 82

Реконструкция Хабелашвили

А. В. Хабелашвили [22] предложил элементарное решение задачи о проведении окружности, касающейся трех данных окружностей, которым, по его мнению, должен был пользоваться Аполлоний.

В работе [22] указаны решения этой задачи многими математиками от Паппа до Я. Штейнера, А. Ф. Мебиуса, Ж. Лиувилля и А. Кэли, решавших эту задачу с помощью применения инверсии относительно окружности. Хабелашвили считал, что «во всех без исключений решениях задачи Аполлония авторы используют геометрические факты, свойства геометрических фигур или же геометрические понятия, неизвестные математикам в эпоху Аполлония» [22, с. 9].

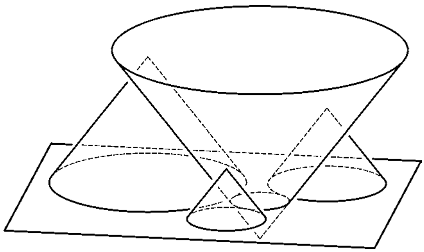


Рис. 83

Реконструкция решения этой задачи Аполлония, предложенная в работе [22], состоит в следующем. Пусть на плоскости Γ заданы три окружности O_1, O_2 и O_3 и требуется провести окружность O, касающуюся этих окружностей внешним образом. «Построим на данных кругах, как на основаниях, три прямых конуса AO_1, BO_2, CO_3 с одинаковыми углами α при вершинах [A, B и C], а четвертый круговой прямой конус DO с таким же углом α при вершине, произвольным радиусом основания и высотой, параллельной высотам построенных конусов, направим вершиной D вниз к плоскости Γ и, сохраняя параллельность высот, будем перемещать его до тех пор, пока он не коснется одновременно всех трех конусов внешним образом. Коническая поверхность DO пересечет плоскость Γ по искомой окружности O» [22, с. 10] (рис. 83).

В случае, когда окружность O должна касаться трех данных окружностей внутренним образом, конус DO направляется вершиной вверх.

В случае, когда окружность O должна касаться одних из данных окружностей внешним образом, а других — внутренним образом, конусы на данных кругах строятся так, чтобы их касания с конусом DO были одного рода с касаниями соответствующих кругов. В общем случае задача имеет восемь решений.

Далее на основе этого стереометрического решения задачи Аполлония, Хабелашвили излагает планиметрическое решение с помощью циркуля и линейки. Для этого рассматривается эллипс, по которому плоскость ABC пересекается с конусом DO. По углу 2α при вершине конуса и углу β между плоскостями ABC и Γ по формуле (6.26) определяется отношение полуосей эллипса. Большая ось эллипса перпендикулярна линии пересечения плоскостей ABC и Γ. Так как конус DO касается конусов AO_1, BO_2 и CO_3 по их прямолинейным образующим, конус DO проходит через вершины A, B и C этих конусов, поэтому через точки A, B и C проходит и эллипс, по которому поверхность конуса DO пересекается с плоскостью ABC.

Планиметрическое решение Хабелашвили задачи Аполлония гораздо сложнее решения задачи Аполлония с помощью инверсии,

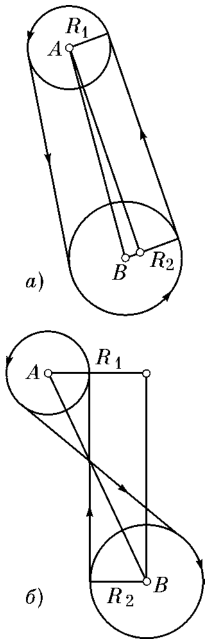


Рис. 84

которая, как мы видели в главе 10, была известна Аполлонию за несколько столетий до Штейнера, Мебиуса и Лиувилля.

Сущность стереометрической реконструкции Хабелашвили состоит в следующем. Если мы поставим в соответствие всякой окружности (10.1) на плоскости Γ точку пространства с координатами $x=x_0$, $y=y_0$, $z=r$, мы отобразим многообразие всех окружностей плоскости на полупространство, ограниченное плоскостью $z=0$. Для того чтобы отобразить многообразие окружностей на все пространство, следует различать ориентацию окружностей и ставить в соответствие всякой окружности, ориентированной в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки, точку с положительной координатой z, а всякой окружности, ориентированной в отрицательном направлении, — точку с отрицательной координатой z.

Это изображение точек пространства окружностями было предложено Евграфом Степановичем Федоровым (1853—1919) [21].

Если две окружности обладают общими касательными, то число этих касательных не более четырех и расстояния между точками касания на этих касательных попарно равны. В случае ориентированных окружностей рассматриваются только такие их общие касательные, на которых ориентации окружностей определяют одно и то же направление (рис. 84, *а*, *б*). В этом случае расстояние между точками касания d называется «касательным расстоянием» между ориентированными окружностями. Если две ориентированные окружности изображаются точками пространства с координатами x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2, то касательное расстояние d между ориентированными окружностями выражается через координаты точек по формуле

$$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2. \tag{14.5}$$

Формула (14.5) отличается от формулы (11.8) только обозначениями координат. Поэтому пространство, в котором расстояние d между точками определяется по формуле (14.5), является псевдоевклидовым пространством.

Изотропные прямые этого пространства изображают параболические пучки окружностей, состоящие из окружностей, касающихся друг друга (рис. 85).

Движения псевдоевклидова пространства определяют преобразования в многообразии окружностей, переводящие точки в окружности. Эти преобразования совпадают с преобразованиями Лагерра.

Вершины конусов, рассматривавшихся Хабелашвили, изображают окружности, по которым поверхности этих конусов пересекаются с плоскостью $z=0$. Реконструкция Хабелашвили основана на том, что прямолинейные образующие этих конусов изображают параболические пучки окружностей.

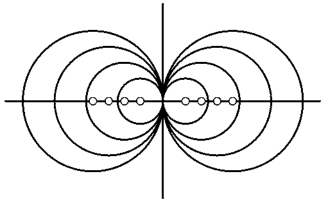


Рис. 85

Если A, B и C — три точки псевдоевклидова пространства, изображающие окружности или точки плоскости, то каждая из этих точек является вершиной конической поверхности, состоящей из изотропных прямых. Две из этих поверхностей пересекаются по линии, которая имеет с третьей конической поверхностью одну или несколько общих точек, изображающих окружности, которые являются решениями соответственных задач Аполлония.

Конформная и контактная интерпретации

Задача Аполлония о проведении окружности, касающейся трех данных окружностей, кроме интерпретации, связанной с преобразованиями Лагерра, допускает также интерпретации, связанные с круговыми и контактными преобразованиями.

Многообразие окружностей конформной плоскости, если считать за расстояние между окружностями вещественный или мнимый угол между ними, изометрично области проективного пространства, являющейся внешней областью овальной поверхности второго порядка

$$X^2+Y^2+Z^2-U^2=0, \tag{14.6}$$

если координаты точек этой области нормированы условием

$$X^2+Y^2+Z^2-U^2=1, \tag{14.7}$$

а расстояния d между точками с координатами (X_1, Y_1, Z_1, U_1) и (X_2, Y_2, Z_2, U_2) определяются по формуле

$$\cos d=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2-U_1U_2. \tag{14.8}$$

Внешняя область поверхности (14.6), между точками которой определено расстояние d по формуле (14.8), называется псевдоэллиптическим пространством.

Окружность (8.29) изображается в псевдоэллиптическом пространстве точкой с координатами

$$X=\frac{x_0^2+y_0^2-r^2-1}{2r}, \quad Y=\frac{x_0^2}{r}, \quad Z=\frac{y_0^2}{r}, \quad U=\frac{x_0^2+y_0^2-r^2+1}{2r}. \tag{14.9}$$

Прямые линии псевдоэллиптического пространства, не пересекающие поверхность (14.6), называются эллиптическими прямыми и изображают эллиптические пучки окружностей, эти линии замкнуты и имеют конечную длину π, длины отрезков этих линий вещественны.

Прямые линии псевдоэллиптического пространства, пересекающие поверхность (14.6), называются гиперболическими прямыми и изображают гиперболические пучки окружностей, длины отрезков этих линий чисто мнимы, эти прямые бесконечны.

Прямые линии псевдоэллиптического пространства, касающиеся поверхности (14.6), называются изотропными прямыми. Они изображают параболические пучки окружностей, длины отрезков этих линий равны нулю.

Если A, B и C — три точки псевдоэллиптического пространства, изображающие три окружности или прямые, то изотропные прямые, выходящие из этих точек, образуют три конические поверхности, касающиеся поверхности (14.6). Две из этих конических поверхностей пересекаются по линии, эта линия имеет с третьей конической поверхностью одну или несколько общих точек, изображающих окружности, являющиеся решениями соответствующих задач Аполлония.

Аналогично, если A, B и C — три точки гиперповерхности (14.1), изображающие три окружности контактной геометрии, каждая из этих точек является вершиной конической поверхности, состоящей из прямолинейных образующих гиперповерхности (14.1). Эти конические поверхности являются пересечениями гиперповерхности (14.1) с касательными гиперплоскостями к ней в точках A, B и C. Две из этих конических поверхностей также пересекаются по линии, эта линия имеет с третьей конической поверхностью одну или несколько общих точек, изображающих окружности, являющиеся решениями всех 10 задач сочинения Аполлония «Касания».

Заметим, что П. Ферма обобщил результаты сочинения Аполлония «Касания» на пространство и доказал, что для четырех сфер можно построить такую сферу, которая касается каждой из них. Построения Ферма допускают интерпретации в конформном пространстве, в геометрии пространственных преобразований Лагерра и в пространственной контактной геометрии. Эти интерпретации аналогичны интерпретациям построений Аполлония.

Глава 15

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Правильные многогранники в философии Платона

Сочинение Аполлония «Сравнение додекаэдра с икосаэдром» посвящено теории правильных многогранников.

Правильные многогранники были открыты пифагорейцами и играли важную роль в философии Платона (425—347 гг. до н. э.), вследствие чего эти многогранники часто называют «платоновыми телами».

Грани правильных многогранников являются правильными многоугольниками, с каждой вершиной правильного многогранника также связан правильный многоугольник, называемый «вершинной фигурой». Вершинами этого многоугольника являются середины ребер, выходящих из вершины многогранника.

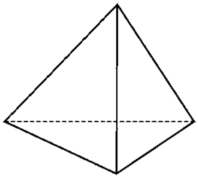
Имеются пять правильных многогранников: тетраэдр (треугольная пирамида), гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр и икосаэдр. Названия этих многогранников состоят из греческих числительных, означающих, соответственно, 4, 6, 8, 12 и 20, и слова *hedra* — «грань», или «основание».

Тетраэдр имеет 4 грани и 4 вершины, куб — 6 граней и 8 вершин, октаэдр — 8 граней и 6 вершин, додекаэдр — 12 граней и 20 вершин, икосаэдр — 20 граней и 12 вершин.

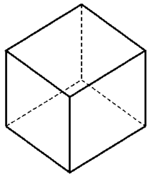
Гранями этих многогранников являются, соответственно, треугольники, квадраты, треугольники, пятиугольники, треугольники. Вершинными фигурами этих многогранников являются, соответственно, треугольники, треугольники, квадраты, треугольники, пятиугольники (рис. 86, *а—д*).

В диалоге «Тимей» Платон вложил в уста пифагорейца Тимея следующие слова: «Теперь должно сказать, каковы же те четыре рожденных тела, прекраснейшие из всех, которые не подобны друг другу, однако способны, разрушаясь, друг в друга перерождаться. Если нам удастся попасть в точку, у нас в руках будет истина о рождении земли и огня, а равно и тех [стихий], что стоят между ними как средние члены пропорции...

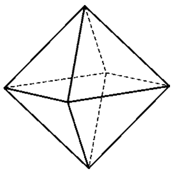
Начнем с первого вида, состоящего из самых малых частей: его первоначало — треугольник, у которого гипотенуза вдвое длиннее меньшего катета. Если такие треугольники сложить, совмещая их гипотенузы, и повторить такое действие трижды, притом так, чтобы



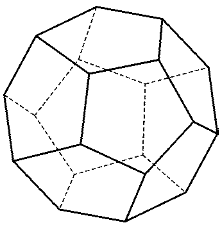
а)



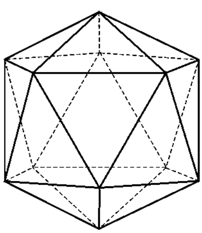
б)



в)



г)



д)

Рис. 86

меньшие катеты и гипотенузы сошлись в одной точке как в своем центре, то из шестикратного числа треугольников будет рожден один, и он будет равносторонним. Когда же четыре равносторонних треугольника окажутся соединенными в три двугранных угла, они образуют один объемный угол, а именно такой, который занимает место вслед за самым тупым из плоских углов. Завершив построение четырех таких углов, мы получаем первый объемный вид, имеющий свойство делить всю описанную около него сферу на равные и подобные части.

Второй вид строится из таких же исходных треугольников, соединившихся по восемь в равносторонний треугольник и образующих каждый раз из четырех плоских углов по одному объемному; когда таких объемных углов шесть, второе тело получает завершенность.

Третий вид образуется из сложения ста двадцати [восьми] исходных треугольников и двенадцати объемных углов, каждый из которых охвачен пятью равносторонними треугольными плоскостями, так что все тело имеет двадцать граней, являющих собой равносторонние треугольники.

На этом порождении и кончилась задача первого из первоначал. Но равнобедренный треугольник породил природу четвертого [вида], и притом так, что четыре треугольника, прямые углы которых встречались в одном центре, образовывали квадрат; а из сложения шести квадратов возникало восемь объемных углов, каждый из которых гармонично охватывается тремя плоскими прямыми углами. Составившееся таким образом тело имело очертания куба, наделенного шестью квадратными плоскими гранями. В запасе оставалось еще пятое многогранное построение; его Бог определил для Вселенной и прибегнул к нему, когда разрисовывал его и украшал...

Начнем разделять роды, только что рожденные в нашем слове, на огонь, землю, воду и воздух.

Земле мы, конечно, припишем вид куба: ведь из всех четырех родов наиболее неподвижна и пригодна к образованию тел именно земля, а потому ей необходимо иметь самые устойчивые основания. Между тем не только из наших исходных треугольников равносторонний, если взять его как основание, по природе устойчивее неравностороннего, но и образующийся из сложения двух равно[бедренных] треугольников квадрат с необходимостью более устойчив, нежели равносторонний треугольник, причем соотношения это сохраняет силу как для частей, так и для целого. Значит, мы не нарушим правдоподобия, если назначим этот удел земле, а равно и в том случае, если наименее подвижный из всех остальных видов отведем воде, наиболее подвижный — огню, а средний — воздуху; далее, наименьшее тело — огню, наибольшее — воде, а среднее — воздуху, и, наконец, самое остроугольное тело — огню, следующее за ним — воздуху, а третье — воде. Но из всех вышеназванных тел наиболее подвижно по природе своей и по необходимости то, у которого наименьшее число оснований, ибо оно со всех сторон имеет наиболее режущие грани и колющие углы, а к тому же оно и самое легкое, коль скоро в его состав входит наименьшее число исходных частей. То тело, которое обладает такими же свойствами, но второго порядка, и место займет второе, а то, которое обладает третьим порядком этих свойств, — третье. Пусть же образ пирамиды, рожденный объемным, и будет, в согласии со справедливым рассуждением и с правдоподобием, первоначалом и семенем огня; вторым по рождению мы назовем воздух, третьим же — воду. Но при этом мы должны представить себе, что все эти [тела] до такой степени малы, что единичное [тело] каждого из перечисленных родов по причине своей малости для нас невидимо, и лишь складывающиеся из их множеств массы бросаются нам в глаза» [14, с. 495—499].

«Стихиями» (*stoicheia*) греки называли четыре элемента, из которых состоит подлунный мир, — огонь, воздух, воду и землю. В названиях сочинений Евклида это слово принято переводить «начала». Под «пропорцией» Платон имел в виду соотношение (2.2), в которое входит четыре величины a, x, y, b. В приведенном нами рассуждении обосновывалось, что атомы огня имеют форму тетраэдра, атомы воздуха — октаэдра, атомы воды — икосаэдра, атомы земли — куба, а мир в целом имеет форму додекаэдра. Слова о том, что «Бог разрисовывал и украшал» пятый многогранник, означают, что, по мнению Тимея, на 12 гранях мира, имеющего форму додекаэдра, были изображения 12 знаков зодиака.

Поэтому средневековые математики называли тетраэдр «телом огня», октаэдр — «телом воздуха», икосаэдр — «телом воды», куб — «телом земли», а додекаэдр — «телом неба». Последнее название было связано также с тем, что форма додекаэдра приписывалась атомам эфира, из которого, по мнению средневековых ученых, состоят небесные сферы и планеты.

Платон заимствовал учение об атомах элементов у древних атомистов, которые считали атомы неделимыми, что и означает слово *atomos*. Платон никогда не употреблял слово «атом», так как считал атомы делимыми и полагал, что грани атомов можно представить в виде

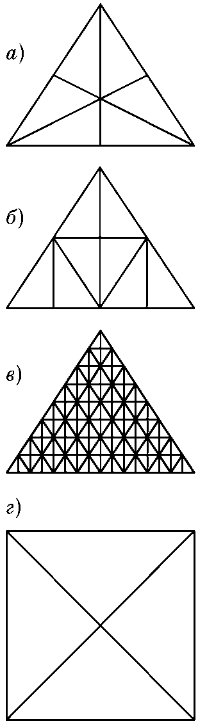


Рис. 87

комбинации треугольников. На рис. 87, *а—г* изображены подразделения Платона граней правильных многогранников на треугольники.

Правильные многогранники в «Началах» Евклида

Изучению правильных многогранников посвящена XIII книга «Начал» Евклида. Эта теория была создана любимым учеником Платона Теэтетом.

В XIII книге «Начал» приводятся следующие выражения L длин ребер правильных многогранников через радиус R сферы, в которую они вписаны:

для тетраэдра $L=\frac{2}{3}R\sqrt{6},$ (15.1)

для куба $L=\frac{2}{3}R\sqrt{3},$ (15.2)

для октаэдра $L=R\sqrt{2},$ (15.3)

для додекаэдра $L=\frac{1}{3}R(\sqrt{15}-\sqrt{3}),$ (15.4)

для икосаэдра $L=\frac{1}{5}R\sqrt{10(5-\sqrt{5})}.$ (15.5)

Если поставить в соответствие каждой грани правильного многогранника центр описанного около нее круга и считать полученные точки вершинами нового многогранника, мы получим правильный многогранник, двойственный исходному. Тетраэдр двойственен сам себе, куб и октаэдр двойственны друг другу, додекаэдр и икосаэдр также двойственны друг другу. Вершины одного из двух двойственных многогранников соответствуют плоскостям граней другого по принципу двойственности проективной геометрии.

XIV книга «Начал» Евклида

Во многих рукописях «Начал» Евклида к 13 книгам этого труда были добавлены еще две книги, написанные другими авторами. XIV книга была написана Гипсиклом, жившим во II в. до н. э.

Во введении к этой книге, адресованном Протарху, Гипсикл писал, что его отец и Василид из Тира изучали в Александрии трактат Аполлония о сравнении вписанных в одну и ту же сферу додекаэдра и икосаэдра. Они «пришли к мнению, что это не было правильно изложено Аполлонием и они сами написали исправленный текст... Позднее и мне самому попалась в руки другая изданная Аполлонием книга, содержащая некоторое доказательство, касающееся вышеизложенного, и я сам с большим воодушевлением занялся исследованием этой задачи. Теперь с изданной Аполлонием книгой можно, по-видимому, всем ознакомиться, так как она находится в обращении, как кажется, в позднейшей более тщательно написанной редакции; сам же я, написавши в виде комментария все, что мне показалось нужным, решил обратиться к тебе» [9, т. 3, с. 142].

Сочинение Гипсикла содержит восемь предложений, важнейшим из которых является предложение 3: «Один и тот же круг охватывает и пятиугольник додекаэдра, и треугольник икосаэдра, вписанных в ту же самую сферу» [9, т. 3, с. 144]. По поводу этого предложения Гипсикл писал: «Это излагается Аристеем в книге, озаглавленной „О сравнении пяти тел“ и Аполлонием во втором издании „Сравнения додекаэдра с икосаэдром“, где доказывается, что как поверхность додекаэдра к поверхности икосаэдра, так и сам додекаэдр будет относиться к икосаэдру вследствие того, что одна и та же прямая будет перпендикуляром, опущенным из центра сферы как на пятиугольник додекаэдра, так и на треугольник икосаэдра» [9, т. 3, с. 143].

Переводчик сочинения Гипсикла И. Н. Веселовский в примечаниях к этому переводу [9, т. 3, с. 327], отмечал, что в этом сочинении для квадрата AB и прямоугольника со сторонами AB и $\Gamma\Delta$ применяются те же выражения «*apo* AB» и «*hypo* AB, $\Gamma\Delta$», что и в «Конических сечениях» Аполлония.

Сочинение Аполлония «Сравнение додекаэдра с икосаэдром»

Утверждение Аполлония, приведенное Гипсиклом, означает, что отношение площадей поверхностей этих многогранников, вписанных в одну и ту же сферу, равно отношению их объемов.

Предложение 8 Гипсикла гласит: «Как ребро куба к ребру икосаэдра, так и тело додекаэдра к телу икосаэдра» [9, т. 3, с. 149]. В этом предложении Гипсикл указал, чему равны отношения объемов и площадей поверхностей додекаэдра и икосаэдра. Так как ребра куба и икосаэдра, вписанных в ту же сферу, равны (15.2) и (15.5), то отношение объемов и площадей, рассматривавшихся Аполлонием, равно

$$\frac{\frac{2}{3}R\sqrt{3}}{\frac{1}{5}R\sqrt{10(5-\sqrt{5})}}=\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}}.$$

Аристей, упомянутый Гипсиклом, был старшим современником Евклида, написавшим одну из первых книг о конических сечениях. Сочинение Аристея «Сравнение пяти тел», так же как его трактат о конических сечениях, не сохранились. Судя по названию, в этом сочинении рассматривались все пять правильных многогранников и, по-видимому, доказывалось, что для каждой пары двойственных

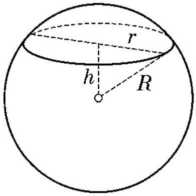


Рис. 88

правильных многогранников, вписанных в одну и ту же сферу, радиусы кругов, описанных около их граней, равны. Для тетраэдра, который двойственен сам себе, это утверждение тривиально. То, что Аристей доказал это для додекаэдра и икосаэдра, засвидетельствовано Гипсиклом. Для куба и октаэдра, вписанных в сферу радиуса R, радиусы кругов, описанных около квадратных граней куба и треугольных граней октаэдра, равны $3R/2$.

Доказательство Аполлония в трактате о додекаэдре и икосаэдре основано на двух фактах:

1) для любого правильного многогранника, вписанного в сферу радиуса R, радиус r круга, описанного около его грани, и перпендикуляр h, опущенный из центра сферы на эту грань (рис. 88), связаны соотношением

$$R^2 = r^2 + h^2, \tag{15.6}$$

2) следствие из предложения XII_7 «Начал» Евклида [9, т. 3, с. 78], в силу которого объем любой пирамиды равен трети произведения площади ее основания на высоту. Так как Аристей доказал, что радиусы r для додекаэдра и икосаэдра, вписанных в сферу радиуса R, равны, из соотношения (15.6) следует, что для этих многогранников перпендикуляры h также равны. Если мы обозначим площадь пятиугольной грани додекаэдра, вписанного в сферу радиуса R, буквой P, $P = \frac{1}{6}\sqrt{10(5-\sqrt{5})}$, а площадь треугольной грани икосаэдра, вписанного в ту же сферу, буквой T, $T = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}$, то площадь поверхности додекаэдра будет равна $12P$, площадь поверхности икосаэдра — $20T$. С другой стороны, каждый правильный многогранник можно разбить на пирамиды, основаниями которых являются грани многогранника, а вершинами — центр сферы. Объем каждой такой пирамиды додекаэдра равен $Ph/3$, а объем каждой такой пирамиды икосаэдра равен $Th/3$. Поэтому объем додекаэдра равен $4Ph$, а объем икосаэдра равен $20Th/3$. Отношение как площадей поверхностей, так и объемов этих многогранников равно

$$\frac{12P}{20T} = \frac{4Ph}{20Th/3} = \frac{3P}{5T} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}}.$$

Подобным образом аналогичную теорему можно доказать для тетраэдра, куба и октаэдра, вписанных в одну и ту же сферу (длина ребра тетраэдра так же относится к длине ребра октаэдра, как объём куба к объёму октаэдра и как плозадь поверхности куба к площади поверхности октаэдра). Если площадь грани куба равна Q, а площадь грани октаэдра равна T, то площади поверхностей этих многогранников равны $6Q$ и $8T$, а их объемы равны $2Qh$ и $8Th/3$, и

$$\frac{6Q}{8T}=\frac{2Qh}{8Th/3}=\frac{3Q}{4T}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

По-видимому, Аристей доказал, что отношение площадей поверхностей куба и октаэдра равно отношению их объемов, вычисляя эти объемы более простым способом, например, считая, что объем куба равен кубу его ребра, объем октаэдра равен трети произведения квадрата его ребра на диаметр сферы. Несомненно, что решение этой задачи навело Аполлония на аналогичную задачу о додекаэдре и икосаэдре.

Заметим, что теоремы, аналогичные теореме Аристея о кубе и октаэдре и теореме Аполлония о додекаэдре и икосаэдре, имеют место для двойственных правильных многогранников в пространстве любого числа измерений.

Винтовые линии

Правильные многогранники являются многогранниками с максимальным числом движений, которые переводят их в себя. Число таких движений в случае тетраэдра равно 24, в случае куба и октаэдра — 48, а в случае додекаэдра и икосаэдра — 120. Эти движения образуют конечные группы.

Другой рассматривавшийся Аполлонием геометрический образ, допускающий группу движений, переводящих этот образ в себя, изучался им в сочинении «Винтовые линии». Согласно сообщению Прокла, в этом трактате описывались винтовые линии на поверхности кругового цилиндра (рис. 89). Эти линии определяются параметрическими уравнениями

$$x=a\cos t,\qquad y=a\sin t,\qquad z=bt.$$

Они переводятся в себя винтовыми движениями, состоящими из поворотов вокруг оси цилиндра и параллельных переносов вдоль этой оси.

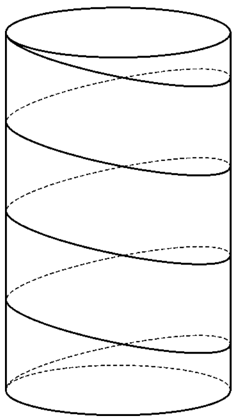


Рис. 89

Глава 16

ЧИСЛА И ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ

Числа

Во II книге «Математического собрания» Паппа приводятся его комментарии к трактату Аполлония, в котором решалась та же задача, что и в «Исчислении песчинок» Архимеда [4, с. 358—367]. В этом сочинении Архимед предложил систему названий больших чисел, с помощью которых можно выразить число песчинок, заполняющих шар, ограниченный «сферой неподвижных звезд». Архимед называл числа от 1 до 10^8, кроме последнего, «первыми числами», число 10^8 он называл единицей «вторых чисел»; числа от 10^8 до $10^{8\cdot 2}=10^{16}$, кроме последнего, он называл «вторыми числами», число 10^{16} он называл единицей «третьих чисел»; числа от 10^{16} до $10^{8\cdot 3}=10^{24}$, кроме последнего, Архимед называл «третьими числами» и т. д.

Комментарии Паппа сохранились не полностью, а только с предложения 14 до предложения 26. Название тракта неизвестно.

Историки математики считают, что этот трактат Аполлония был написан при жизни Архимеда и являлся ответом на не дошедшую до нас книгу Архимеда, адресованную Зевксиппу, которая упоминается в «Исчислении песчинок». В этой книге была изложена первая попытка Архимеда разработать систему названий больших чисел. Система названий больших чисел Аполлония была близка к системе «Исчисления песчинок», но она была основана не на числе 10^8, а на мириаде, равной 10^4. По-видимому, «Исчисление песчинок» было написано после трактата Аполлония, и в нем Архимед использовал некоторые идеи трактата Аполлония.

Судя по комментариям Паппа, трактат Аполлония содержал много вычислений с большими числами.

Возможно, что в не дошедшем до нас трактате Аполлония были изложены также сведения по астрономии, которой он занимался в молодые годы.

Иррациональности

Комментарии Паппа к X книге «Начал» Евклида, содержащие сведения о сочинении Аполлония «О неупорядоченных иррациональностях», сохранились только в арабском переводе Абу ʻОсмана Саʻида ад-Димашки (X в.). Этот перевод исследовался Г. Юнге и В. Томсоном [47].

Раздел перевода ад-Димашки, относящийся к трактату Аполлония, издан во французском переводе Ф. Вепке [58, с. 685—695].

В X книге «Начал» Евклида [9, т. 2, с. 101—256] была изложена созданная Теэтетом теория квадратичных иррациональностей. Если a и b — рациональные линии, т. е. прямолинейные отрезки, длины которых равны произведениям длины единичного отрезка на рациональные числа, то к иррациональностям, рассматриваемым в X книге «Начал» Евклида, относятся медиаль $\sqrt{ab}$, биномиаль $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, вычет $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, бимедиаль $\sqrt{\sqrt{ab}}$ и их различные комбинации. Приведенные в XIII книге «Начал» выражения (15.1), (15.2) и (15.3) ребер тетраэдра, куба и октаэдра, вписанных в сферу радиуса R, являются медиалями, выражение (15.4) ребра додекаэдра — вычет, и выражение (15.5) ребра икосаэдра является «меньшей иррациональностью».

Согласно комментариям Паппа, в трактате Аполлония теория квадратичных иррациональностей Теэтета—Евклида дополнялась рассмотрением новых иррациональностей. Аполлоний определял триномиаль $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$, квадриномиаль $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ и аналогичные полиномиали, состоящие из произвольного числа слагаемых. Если медиаль $\sqrt{ab}$ является средней пропорциональной между линиями a и b, то Аполлоний рассматривал также две средние пропорциональные между линиями a и b, удовлетворяющие условию (2.2), три средние пропорциональные, удовлетворяющие условию

$$a:x=x:y=y:z=z:b, \tag{16.1}$$

четыре средние пропорциональные, удовлетворяющие условию

$$a:x=x:y=y:z=z:t=t:b \tag{16.2}$$

и т. д. Средняя пропорциональная x, удовлетворяющая условиям (2.2), (16.1) и (16.2), равна, соответственно, $\sqrt[3]{a^2b}$, $\sqrt[4]{a^3b}$ и $\sqrt[5]{a^4b}$. Таким образом, Аполлоний наряду с квадратичными иррациональностями рассматривал также кубические иррациональности и иррациональности высших степеней. Под «упорядоченными иррациональностями» Аполлоний понимал иррациональности, перечисленные Евклидом, а «неупорядоченными иррациональностями» Аполлоний называл рассматриваемые им новые иррациональности.

Аполлоний указывал, что множество таких иррациональностей бесконечно.

«Быстросчет»

Трактат Аполлония «Быстрое получение результатов» был посвящен приближенному вычислению отношения длины окружности к диаметру, которое рассматривалось Архимедом в «Измерении круга» [4, с. 266—271]. Греческое название трактата Аполлония буквально означает «быстрое разрешение от бремени». Переводчик сочинений Архимеда И. Н. Веселовский рекомендовал переводить это название «Быстросчет» [4, с. 598].

В трактате Аполлония задача приближенного вычисления числа π решалась более быстро, чем у Архимеда.

ДАТЫ ЖИЗНИ И ДЕЯТЕЛЬНОСТИ АПОЛЛОНИЯ

Ок. 250 до н. э. Родился в Перге в Малой Азии.

Ок. 235—225 до н. э. Учился в Эфесе у Евдема Пергамского.

Ок. 225—215 до н. э. Учился в Александрии у учеников Евклида. Разработал теорию движения Солнца, Луны и планет по деферентам и эпициклам.

Ок. 215—195 до н. э. Писал «Конические сечения» в Александрии. Посетил Евдема Пергамского в Пергаме и послал ему I—III книги «Конических сечений». После смерти Евдема Пергамского послал остальные книги «Конических сечений» его ученику Атталу.

Ок. 170 до н. э. Умер.

БИБЛИОГРАФИЯ

[1] Аполлоний Пергский. Конические сечения с комментариями Эвтокия / Пер. И. Ягодинского // Известия Северо-Кавказского гос. университета. — Т. 3 (15). — 1928. — С. 130—152.

[2] Аристотель. Метафизика / Пер. под ред. А. Ф. Асмуса // Сочинения. — Т. 1. — М.: Мысль, 1975. — С. 63—366.

[3] Аристотель. Метеорологика / Пер. Н. В. Брагинской // Сочинения. — Т. 3. — М.: Мысль, 1981. — С. 441—555.

[4] Архимед. Сочинения / Пер. и комм. И. Н. Веселовского. — М.: Физматгиз, 1962.

[5] Белоногова М. В. Метод нахождения наибольших и наименьших значений в работах Аполлония // Историко-математические исследования. — Вып. 35. — 1994. — С. 214—219.

[6] ван дер Варден Б. Л. Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции / Пер. И. Н. Веселовского. — М.: Физматгиз, 1959.

[7] Ващенко-Захарченко М. Е. История математики: Т. 1. Исторический очерк развития геометрии. — Киев: Изд-во Киевского ун-та, 1883.

[8] Витрувий М. П. Десять книг об архитектуре / Комм. Д. Барбаро / Пер. А. И. Венедиктова, В. П. Зубова и Ф. А. Петровского. — М.: Изд-во Академии архитектуры, 1938.

[9] Евклид. Начала: В 3-х т. / Пер. и комм. Д. Д. Мордухай-Болтовского и И. Н. Веселовского. — М.—Л.: Гостехиздат, 1948—1950.

[10] История математики с древнейших времен до начала XIX столетия / Под ред. А. П. Юшкевича. — Т. 1. — М.: Наука, 1970.

[11] Краснова С. А. Примечания к «Книге о построении трех [конических] сечений» Ибрахима ибн Синана // Историко-математические исследования. — Вып. 16. — 1965. — С. 437—446.

[12] Лютер И. О. К истории задачи Аполлония о построении окружности, касающейся трех данных окружностей // Историко-математические исследования. — Сер. 2. — Вып. 1 (36). — № 2. — 1996. — С. 82—94.

[13] Нейгебауер О. Точные науки в древности / Пер. Е. В. Гохман. — М.: Наука, 1968.

[14] Платон. Тимей / Пер. С. С. Аверинцева // Сочинения. — Т. 3, ч. 1. — М.: Мысль. 1971. — С. 455—541.

[15] Птолемей К. Альмагест, или Математическое сочинение в 13 книгах / Пер. И. Н. Веселовского / Комм. Г. Е. Куртика, М. М. Рожанской и Г. П. Матвиевской. — М.: Наука, Физматлит, 1998.

[16] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. — М.: Наука, 1966.

[17] Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. — М.: Наука, 1969.

[18] Розенфельд Б. А. История неевклидовой геометрии. Развитие понятия о геометрическом пространстве. — М.: Наука, 1976.

[19] Розенфельд Б. А. Метрический метод в проективно-дифференциальной геометрии и ее конформных и контактных аналогах // Математический сборник. — № 22 (62). — 1948. — С. 457—492.

[20] Розенфельд Б. А., Скопец З. А. Квадратичные кремоновы преобразования на плоскости и комплексные числа // Доклады Академии наук СССР. — Т. 83. — 1951. — № 6. — С. 801—804.

[21] Федоров Е. С. Точное изображение точек пространства на плоскости // Записки Горного института. — Т. 1. — 1907. — С. 52—79.

[22] Х а б е л а ш в и л и А. В. Задача Аполлония Пергского // Историко-математические исследования. — Сер. 2. — Вып. 1 (36). — № 2. — 1996. — С. 66—81; М.: Алида, 1994.
[23] Х а й ā м ʻ О м а р. Трактаты / Пер. и комм. Б. А. Розенфельда. — М.: Изд-во восточной литературы, 1961.
[24] Apollonii Pergaei quae graece extant cum commentariis antiquiis / Ed. J. L. Heiberg. — Vol. 1—2. — Lipsiae: Teubner, 1891.
[25] Apollōniou Kōnika. Archaion keimenon — Metaphrasis / Hypo E. S. Stamatē. — T. 1—4. — Athēnai: Technikou Epimelētēriou tēs Hellados, 1975.
[26] Apollonius Conics Books V—VII. The Arabic translation of the lost Greek original / Edited with translation and commentary by G. J. Toomer. — Vol. 1—2. — New York — Berlin — Heidelberg — London — Paris — Tokyo — Hong Kong: Springer, 1990.
[27] Apollonii Pergaei Conicorum libri octo et Sereni Antissensis de Sectione Cylindri & Coni libri duo / Edidit Edmundus Halley. — Oxoniae: e Theatro Sheldoniano, 1710.
[28] A p o l l o n i u s d e P e r g e. Les Coniques / Trad. et comm. par Paul Ver Eecke. — Bruges: Brouver, 1923.
[29] Die Kegelschnitte des Apollonius ubersetzt von A. Czwalina. — München — Berlin: Oldenburg, 1926.
[30] A p o l l o n i u s o f P e r g a. Treatise on Conic Sections / Edited in modern notation with introductions by T. L. Heath. — Cambridge: Cambridge University Press, 1896.
[31] A p o l l o n i u s o f P e r g a. Conics / Transl. by R. C. Taliaferro // Great Books of the Western World.—Vol. 11.— Chicago — London — Toronto, 1952. — P. 593—804.
[32] A p o l l o n i u s o f P e r g a. Conics. Books I—III / Transl. by R. C. Taliaferro / Edited by D. Densmore and W. H. Donahue. — Santa Fe: Green Lion Press, 1998.
[33] A p o l l o n i u s o f P e r g a. Conics. Book IV / Transl. by M. Fried. — Santa Fe: Green Lion Press, 2001.
[34] K i t ā b a l - m a ḫ r u t ā t. Das Buch der Kegelschnitte des Apollonius von Perge / Mit Einleitung ünd Facsimile heraus gegeben von prof. Dr. Nazim Terzioğlu. — Istanbul: Üniversite, 1981, 1996.
[35] Apollonii Pergaei de Sectione rationis libri duo, ex arabico manuscripto latine versi / Opera et studio Edmundi Halley. — Oxoniae: e Theatro Sheldoniano, 1706.
[36] A p o l l o n i u s o f P e r g a. On Cutting off a Ratio. An Attempt to Recover the Original Argumentation through a Critical Translation of the Two Extant Medieval Arabic Manuscripts / Transl. by E. M. Macierowski / Edited by R. H. Schmidt. — Fairfield, 1987.
[37] C h a s l e s M. Les trois livres de Porismes d'Euclide établis pour le première fois d'après de notice et les lemmes de Pappus. — Paris, 1860.
[38] C r o n e r t W. Der Epikureer Philonides // Sitzungsberichte königl Preuss. Akademie der Wissenschaften. — Bd. 61. — № 2. — 1900. — S. 942—959.
[39] D i o c l e s. On Burning Mirrors: The Arabic translation of the lost greek Original / Edited with English translation and commentary by G. J. Toomer. — Berlin — Heidelberg — New York: Springer, 1976.
[40] F e r m a t P. Apollonii libri duo de Locis planis restituti // Oeuvres de Fermat. — T. 1. — Paris, 1891. — P. 3—51.
[41] G h e t a l d i M. Supplementum Apollonii Galli. — Venetiis, 1607.
[42] G h e t a l d i M. Apollonius redivivus seu restituta Apollonii Pergae de Inclinationibus Geometria. — Venetiis, 1607.
[43] H o g e n d i j k J. P. Ibn al-Haytham's Completion of the Conics. — New York — Berlin — Heidelberg — Tokyo: Springer, 1985.
[44] H o g e n d i j k J. P. Arabic Traces of Lost Works of Apollonius // Archive for History of Exact Sciences. — Vol. 35. — 1986. — № 3. — P. 187—253.
[45] H o g e n d i j k J. P. On Euclid's Lost Porisms and Its Arabic Traces // Bolletino di Storia delle Scienze Matematiche. — Vol. VII. — 1987. — № 1. — P. 93—115.
[46] H r o z n ý B. Die alteste Geschichte Vorderasien und Indiens. — Prag: Melantrien, 2. Aufl.
[47] J u n g e G., T h o m s o n W. The commentary of Pappus on book X of Euclid's Elements. — Cambridge: Cambridge University Press, 1930.
[48] L a g u e r r e E. Note sur la theorie des foyers // Nouv. Annales de mathematiques. — T. 12. — 1853. — P. 57—66.
[49] L i e S. Ueber Complexe, insbesondere Linien-ünd Kugel-Complexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen: 1. Ordnung // Mathematische Annalen. — Bd. 5. — 1872. — S. 145—256.

[50] P a p p u s d' A l e x a n d r i e. La Collection mathématique / Trad. par P. Ver Eecke. — Vol. 1—2. — Paris — Bruges, 1933.

[51] P a p p u s o f A l e x a n d r i a. Book VII of the Collection / Edited with translation and commentary by A. Jones. — Vol. 1—2. — New York: Springer.

[52] S a k a s I. Ho Archimedes katekausen ton stolon ton Romation di epipedon katoptron (Archimedes burnt the Roman Fleet by using plane mirrors) // Epistemonike ekdosis. Technikou epimeleteriou tes Hellados. — T. 35. — 1966. — S. 941—953.

[53] S a r t o n G. Introduction to the History of Science. — Vol. 1. — Baltimore: Carnegie Institution, 1927.

[54] v a n S c h o o t e n F. Apollonii Loca plana restituta // Exercitationum Mathematicarum liber III. — Lugduno: Batavorum, 1656. — P. 191—292.

[55] T o o m e r G. J. Apollonius of Perga // Dictionary of Scientific Biography.— Vol. 1. — New York, 1969. — P. 66—80.

[56] T o o m e r G. J. Introduction // Apollonius Conics Books V—VII. — New York—Berlin—Heidelberg—London — Paris — Tokyo — Hong Kong: Springer, 1990. — P. XI—XCV.

[57] V i e t a F. Apollonius Gallus sive excuscitata Apollonii Pergaei de Tactionibus Geometria. — Parisiis, 1600.

[58] W o e p c k e F. Essai d'une restitution des travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationelles d'après des indications tirées d'un manuscrit arabe // Mémoires presentées par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France, sciences mathématiques et physique. — Vol. 14. — 1856. — P. 658—720.

[59] Z e u t h e n H. G. Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum. — Hildesheim: Olms, 1966.

Борис Абрамович Розенфельд.

Аполлоний Пергский.

* * *

Редактор *М. Ю. Панов.*
Художник *Н. А. Шихова.*
Корректор *Т. Л. Коробкова.*

Лицензия ИД № 01335 от 24/III 2000 года. Подписано в печать 5/XII 2003 года. Формат 60×88 $^1/_{16}$. Объем 11,00 физ. печ. л. = = 10,76 усл. печ. л. = 11,36 уч.-изд. л. Бумага офсетная № 1. Гарнитура обыкн. нов. Печать офсетная. Тираж 2000 экз. Заказ 4741.

Книга соответствует гигиеническим требованиям к учебным изданиям для общего и начального профессионального образования (заключение государственной санитарно-эпидемиологической службы Российской Федерации № 77.99.02.953. Д.002797.04.03 от 18/IV 2003 года).

Издательство Московского центра непрерывного математического образования. 119002, Москва, Г-2, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. 241 72 85.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ». 140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403. Тел. 554 21 86.